CONJUNTOS EN R^3

Presentación: este apunte te servirá para repasar y asimilar la relación entre ecuaciones, planos y rectas en R^3. No todo está resuelto aquí. Cómo obtener de una ecuación explicita una ecuación en forma paramétrica vectorial está explicado en los documentos:

"**Ecuaciones del plano, todas sus formas**"

"**Historia íntima de la ecuación de una recta**"

Si no manejás bien los vectores en 3D, consulta **"Vectores en·3D"**

Podés descargarlos de **www.unamuno.com.ar** Estos documentos, leídos e interpretados correctamente te servirán como introducción al tema de "Espacios Vectoriales" que es una verdadera maraña de definiciones donde es muy fácil confundirse hasta que uno lo entiende, después es "pan comido". ¡Que lo aproveches!

Sea R^3 el conjunto de todos los puntos que pueden ubicarse con tres coordenadas independientes (x,y,z). Si los valores de cada una de estas coordenadas se representa sobre un eje distinto (supongamos que los eje forman ángulos de 90º entre si) podremos representar todos los puntos de nuestro espacio convencional tridimensional, el espacio en el cual vivimos y nos movemos (¿?) (la fig. 1 es una representación en perspectiva caballera (¡que nombre!) de este espacio). Más te vale aprender a dibujar el espacio en perspectiva.

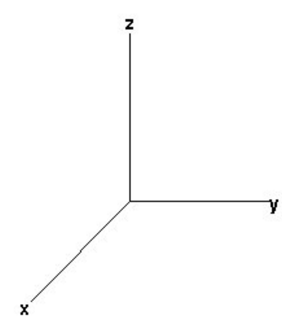


fig. 1

Dado un punto del espacio, podemos hallar sus tres coordenadas (x,y,z) que serán únicas para ese punto y viceversa, dadas las tres coordenadas, podemos hallar el punto. Este es un espacio de 3 dimensiones (o 3D para "hablar en moderno"). Se acabó la introducción.

Ahora, que pasa si yo impongo una restricción sencilla a una de las coordenadas, por ejemplo digo que x=0. Esto define un conjunto de puntos que están limitados por esa ecuación, condición o restricción. Los puntos que cumplen esa restricción son todos los puntos del plano y-z (la pared del fondo), si la condición es z=0, el conjunto sería el plano x-y (el piso) y si la condición es z=3, el conjunto sería el plano paralelo a x-y a una altura 3 (ver fig. 2). Podríamos decir que si imponemos una restricción (mediante una ecuación) a un conjunto de 3 dimensiones obtenemos un conjunto de 2 dimensiones (plano). Si la restricción impuesta es una ecuación que involucra a más variables y es del tipo **a.x + b.y + c.z = d** tendremos la ecuación de un plano que puede ser cualquier plano que te imagines (ver fig. 3).

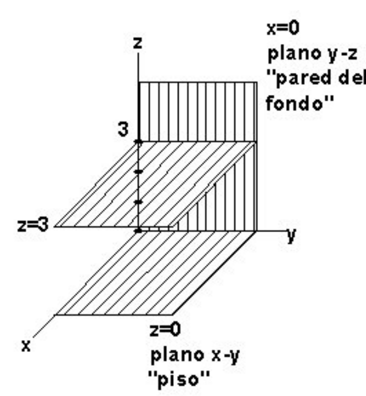


fig. 2

Cuando el termino **d** es nulo, el plano pasa por el origen de coordenadas.

Si un punto pertenece al plano, debe cumplir la ecuación de este, y si cumple la ecuación, pertenece entonces al plano.

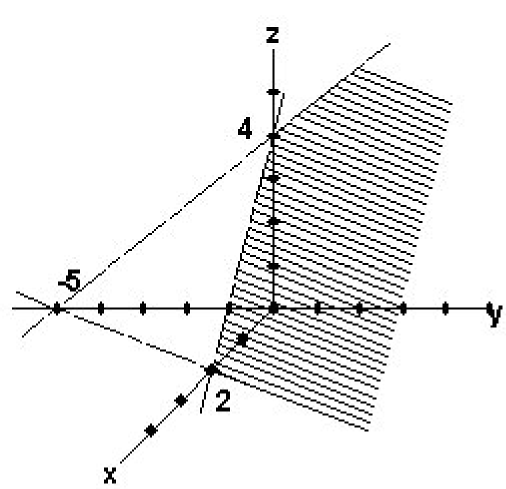


fig. 3

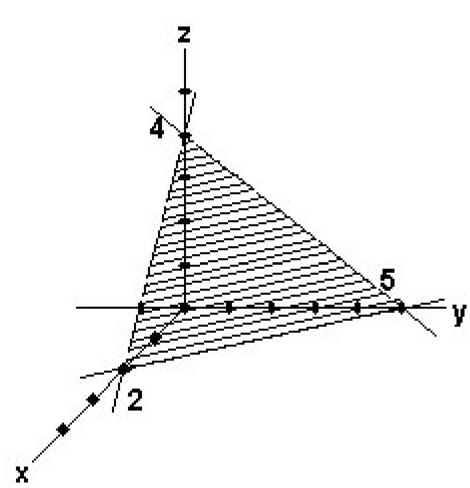


fig. 4

Una forma muy piola de la ecuación del plano es la forma segmentaria que se escribe de la siguiente manera: $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=\mathbf{1}$, si lográs escribir la ecuación segmentaria, graficar el plano es muy sencillo, pues los valores de p,q ,r son las coordenadas donde el plano corta a los ejes x, y , z. (ver figuras 3 y 4). Sus ecuaciones segmentarias son: $\frac{x}{\mathbf{2}}+\frac{y}{\mathbf{-5}}+\frac{z}{\mathbf{4}}=\mathbf{1}$ y $\frac{x}{\mathbf{2}}+\frac{y}{\mathbf{5}}+\frac{z}{\mathbf{4}}=\mathbf{1}$ respectivamente.

Consulta el documento "**Ecuaciones del plano, todas sus formas**" que podes descargar de **www.unamuno.com.ar**

Volvamos a un plano genérico. ¿Por qué un plano es un conjunto de dos dimensiones o 2D?. Porque para ubicar un punto de su superficie, necesito dos valores que corresponderán a las coordenadas del punto en ese plano (coordenadas que dependerán del sistema de ejes que elijas). Ya has manejado el plano coordenado x-y y ese es un claro ejemplo de conjunto de 2D cuyas dimensiones son x e y (**ACLARACIÓN**: cuando utilizamos la palabra "**dimensión**" no nos referimos al "tamaño" de un conjunto sino que le damos a la palabra "**dimensión**" el sentido que tiene cuando decimos "**La Dimensión Desconocida**" es decir una coordenada necesaria para ubicar un punto.)

Conclusión: si a un conjunto de 3 dimensiones (como R^3) le impongo una restricción mediante una ecuación, obtengo un conjunto de 2 dimensiones (3-1=2 ☺).

¿Qué pasa si le impongo una restricción más?. Por ejemplo **x=3** y **z=4**, es decir, quiero todos los puntos (x,y,z) que tiene las coordenadas **x** y **z** limitadas a esos valores, el conjunto esta formado por todos los puntos que tienen **x=3** (plano paralelo a la pared del fondo) y los que tienen **z=4** (plano horizontal a altura 4). Los puntos que están en ambos planos, decimos que pertenecen a la intersección de los planos y la intersección de dos planos suele ser una recta (fig. 5). Y la recta es un conjunto de 1 dimensión, pues sobre una recta (dado un punto de origen) me basta un único valor (o coordenada) para identificar a un punto determinado. La ecuación de esa recta sería:

$\begin{cases} x=\mathbf{3} \\ z=\mathbf{4} \end{cases}$ más fácil imposible. Si querés ver algo sobre ecuaciones de la recta en 3D descargá "**Historia íntima de la ecuación de una recta**", buscalo en **www.unamuno.com.ar**

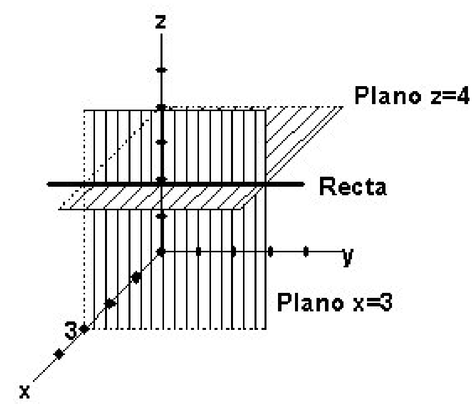


fig. 5

Otra Conclusión: si a un conjunto de 3 dimensiones, le impongo 2 restricciones mediante 2 ecuaciones, obtengo un conjunto de 1 dimensión. ¡Oh my God! 3 - 2 = 1.

Aclaración. En esta etapa hablamos de restricciones o ecuaciones y estas deben ser compatibles (¡si tiene que ver con "**compatibles determinadas**"!), es decir que se puedan establecer sin problemas. Los problemas vienen después.

Lo dicho hasta aquí no puede encerrar ningún misterio, en nuestra geometría euclidiana, sabemos que dos planos se cortan en una recta o no se cortan (son paralelos) o son coincidentes (acá tengo la duda de si son dos planos o uno sólo)

Repasá los postulados de Euclides, que debieron enseñártelos en la escuela primaria. Descarga "**Postulados de Euclides para nenes de 11 años**" de **www.unamuno.com.ar** o busca en www.google.com algo más decente, pero debes conocerlos.

Una restricción más. ¿Qué pasa si agregamos una restricción más a **x=3** y **z=4**? Por ejemplo **y=5**. Ni hace falta un dibujo para ver esto. Tendríamos el conjunto **(3,5,4)** o sea un punto (fig. 6). Es que estamos tomando el conjunto de 1D (la recta determinada por **x=3** y **z=4**) y estamos haciendo la intersección con un conjunto de 2D (plano) determinado por **y=5**. La intersección (o donde se cortan) de una recta y un plano, suele ser un punto. A veces es nada o toda la recta. Ya lo vamos a discutir. Un punto tiene dimensión ..... 0 (cero). (3 – 3 = 0 , ¿te suena?)

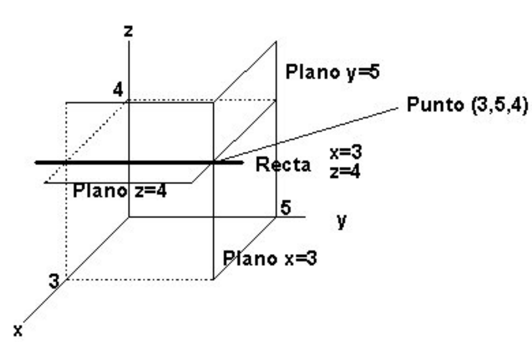


fig. 6

Las restricciones que pusimos, **x=3**, **z=4**, **y=5**, cada una de ellas representa un plano paralelo a los planos coordenados, pero no debemos creer que las cosas son así sólo con planos paralelos a los coordenados. Podemos hacer el mismo razonamiento con cualquier plano. Hay que tener en cuenta que para que los problemas tengan solución deberemos usar planos que se corten entre sí y que no sean coincidentes (es decir que representen Sistemas de Ecuaciones Compatibles Determinados, todavía no quiero entrar en esta discusión).

Ahora vamos a plantear un par de ejemplos con planos que se cortan, que son paralelos (y no se cortan) o que coinciden. Para ver como llegamos de una ecuación a otra en cada ejemplo, lee "**Ecuaciones del plano, todas sus formas**" que podes descargar de **www.unamuno.com.ar**

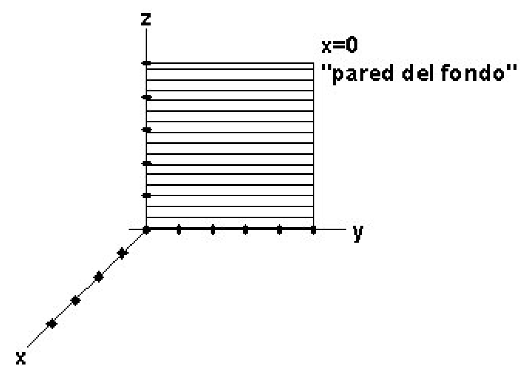
Los últimos ejemplos son casos particulares donde las restricciones o son conjuntos paralelos o son coincidentes y tratamos de interpretar la solución

Al final de estos ejemplos hay una reflexión de cómo interpretar los resultados desde el punto de vista de los sistemas de ecuaciones. si querés podés comenzar por esa interpretación

Ej.: 1 Ecuación **x=0.** Esta ecuación es una sola restricción y por lo tanto deberemos tener como resultado un conjunto de 2D al aplicarla en nuestro conjunto R^3. El conjunto 2D es el plano **y-z** o pared del fondo, "una" ecuación paramétrica de este plano sería:

$$P(x,y,z) = y\,(\mathbf{0};\mathbf{1};\mathbf{0}) + z\,(\mathbf{0};\mathbf{0};\mathbf{1})$$

como hay dos parámetros **y** y **z** para identificar cada punto del plano y los vectores que acompañan a esos parámetros son Linealmente Independientes ☹ este es un conjunto 2D

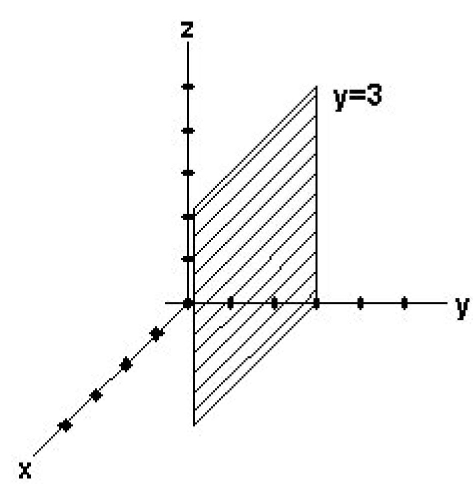


Ej.: 2 Ecuación **y=3.** Esta ecuación es una sola restricción y por lo tanto el conjunto resultante será uno de 2D o sea un plano, en realidad es el plano paralelo al x-z que pasa por algún punto con **y=3**.

"una" de las ecuaciones paramétricas de este plano es

$$P(x,y,z) = x\,(\mathbf{1};\mathbf{0};\mathbf{0}) + z\,(\mathbf{0};\mathbf{0};\mathbf{1}) + (\mathbf{0};\mathbf{0};\mathbf{3})$$

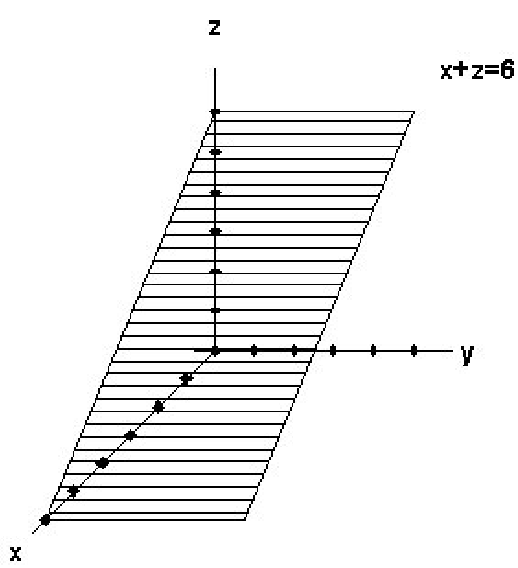
Nuevamente tenemos 2 parámetros x y z que son acompañados por dos vectores Line... Indep... Es decir es un conjunto 2D.



Ej.: 3 Ecuación **x+z=6**. nuevamente imponemos una restricción y el conjunto obtenido es un plano (es 2D). En este caso es un plano paralelo al eje Y.

"Una" ecuación paramétrica de este plano sería

$$P(x,y,z) = x\,(\mathbf{1};\mathbf{0};-\mathbf{1}) + y\,(\mathbf{0};\mathbf{1};\mathbf{0}) + (\mathbf{0};\mathbf{0};\mathbf{6})$$



Ej.: 4 Otra restricción solitaria, el conjunto que obtenemos es de 2 dimensiones

$$5x + 10y + 4z = 20$$

Conjunto de dos dimensiones, "una" forma paramétrica de la ecuación de este plano sería:

$$P(x,y,z) = x(1;0;-\frac{5}{4}) + y(0;1;-\frac{5}{2}) + (0;0;5)$$

los parámetros **x** e **y** que acompañan a los dos vectores **(1;0;-5/4)** y **(0;1;-5/2)** son los que indican que es un conjunto de 2 dimensiones (pues son linealmente independientes y generan ... etc. etc. etc)

lee "**Ecuaciones del plano, todas sus formas**" que podes descargar de **www.unamuno.com.ar**

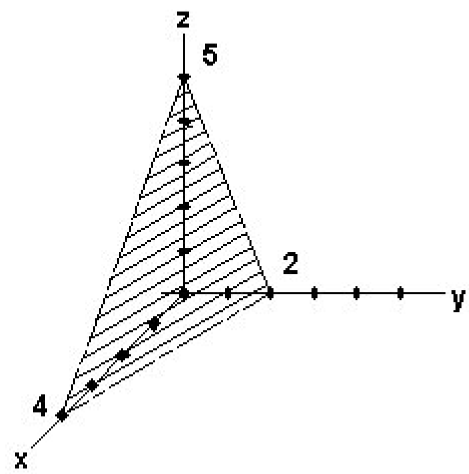


fig. 7

En los siguientes ejemplos el resultado es siempre un conjunto de una sola dimensión, es decir una recta. La ecuación del conjunto siempre tiene un solo parámetro acompañado a un único vector

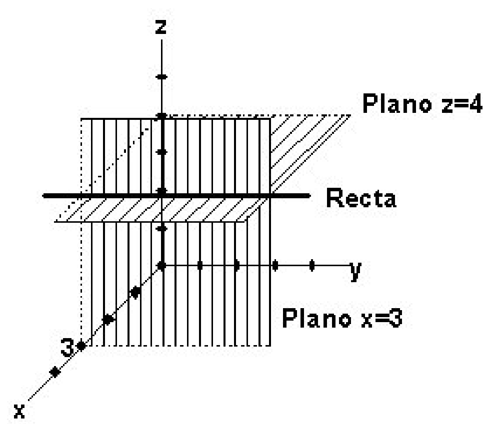
Ej.: 5 Dos restricciones correspondientes a planos paralelos a los planos coordenados, dadas por:

z = 4 y

x = 3

"Una" ecuación vectorial paramétrica del conjunto solución es:

$$L_1(x,y,z) = y(0;1;0) + (3;0;4)$$



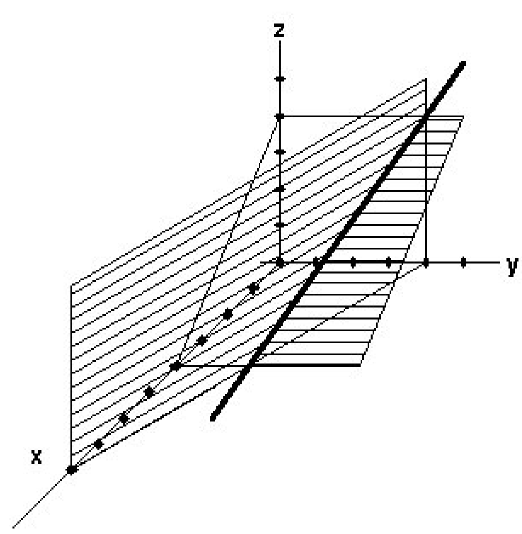
Ej.: 6 Dos restricciones del tipo planos paralelos a los ejes coordenados, dadas por:

x + z = 4 y

x + 2y = 8

La solución a estas ecuaciones o el conjunto que queda determinado por estas restricciones es:

$$L_2(x,y,z) = x(1;-\frac{1}{2};-1) + (0;4;4)$$



Ej.: 7 Dos restricciones:

una ecuación $5x+10y+4z=20$ (plano oblicuo)

y otra **z=2** (plano paralelo al piso)

Las dos restricciones que aplicadas a un conjunto de 3D nos da como resultado un conjunto de 1D o sea una recta cuya ecuación es ....

$$\begin{cases} 5x+10y+4z=20 \\ z=2 \end{cases}$$ y no

$5x+10y+8=20$ o $5x+10y=12$ que surge de reemplazar z por 2

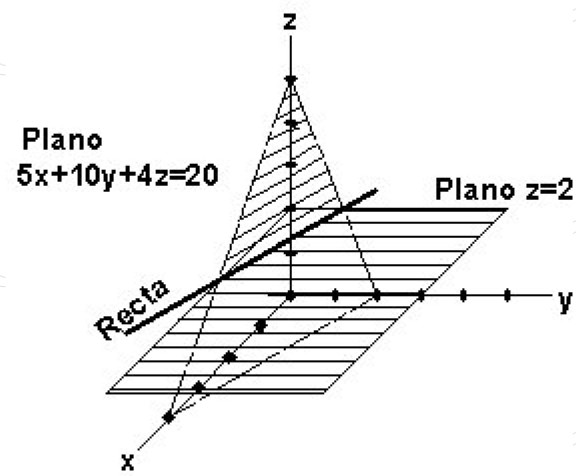


fig. 8

"Una" ecuación vectorial paramétrica de la recta sería:

$L_3(x,y,z)=+y\,(-2;1;0)+(\frac{12}{5};0;2)$ el único parámetro **y** acompañado del vector **(-2;1;0)** en la ecuación es el que nos indica que es un conjunto de una dimensión.

descargá "**Historia íntima de la ecuación de una recta**", buscalo en **www.unamuno.com.ar**

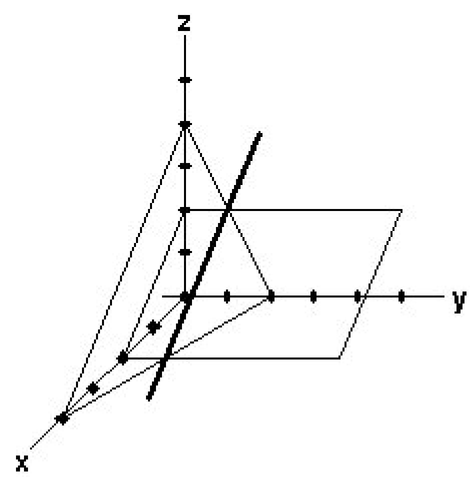
Ej.: 8 Dos restricciones del tipo plano oblicuo y plano paralelo a un eje dadas por:

x + 2 y + z = 4 y

x + z = 2

"Una" ecuación paramétrica de este conjunto es:

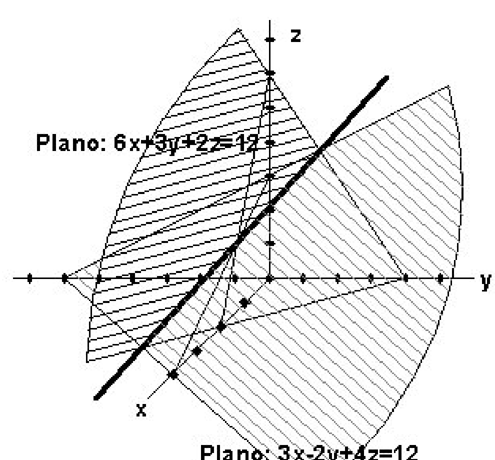
$L_4(x,y,z)=x\,(1;0;-1)+(0;1;2)$



Ej.: 9 Dos restricciones del tipo plano oblicuo dadas por:

3 x – 2 y + 4 z = 12 y

6 x + 3 y + 2 z = 12



En los ejemplos anteriores, hablamos de "Una" ecuación paramétrica, es porque existen muchas ecuaciones paramétricas para un mismo conjunto, sea recta o plano.

En el próximo ejemplo, aplicamos tres restricciones y la solución ya no es un a recta, es un conjunto de dimensión 0 (que no significa que esté vacío).

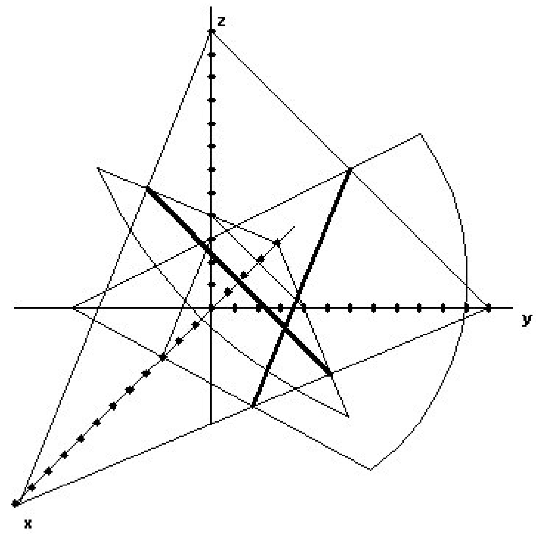
Ej.: 10 Tres restricciones del tipo plano oblicuo, dadas por:

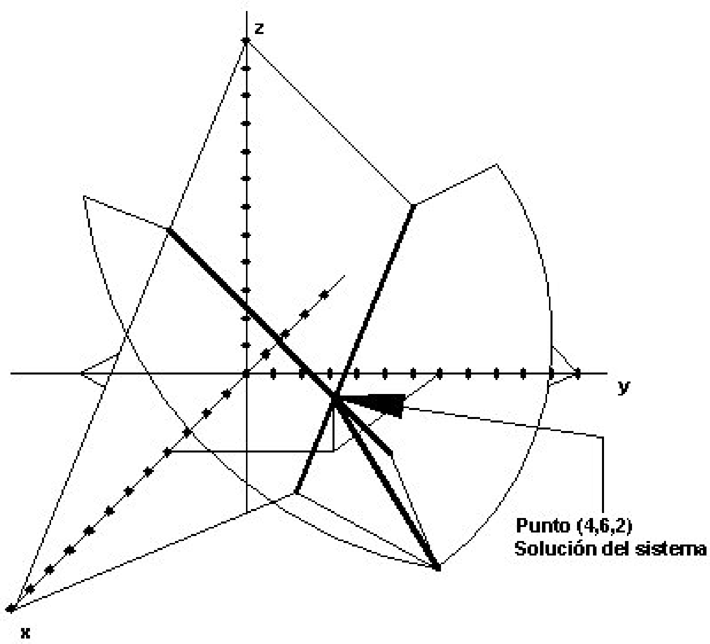
$$x + y + z = 12$$

$$2x - y + 2z = 6$$

$$x - y - z = -4$$

La solución es (4;6;2) es un punto, conjunto de dimensión 0





En los siguientes ejemplos hay un poco de "engaña pichanga", es decir no son lo que parecen.

Ej.: 11 Dos restricciones del tipo plano oblicuo, dadas por:

$$2x + 3y - z = 2 \quad \text{y}$$

$$4x + 6y - 2z = 4$$

Estas dos restricciones aplicadas a R^3, deberían dar como resultado un conjunto de dimensión 1. Pero en realidad no son 2 restricciones, son una sola (las ecuaciones representan planos coincidentes). La segunda ecuación es la primera multiplicada por 2 miembro a miembro.

Entonces el conjunto sigue siendo un plano pues a R^3 sólo le estamos aplicando una restricción y el conjunto debe ser de 3-1= 2 dimensiones.

Ej.: 12 Dos restricciones del tipo plano oblicuo, dadas por:

$$2x + 3y - z = 2 \quad \text{y}$$

$$4x + 6y - 2z = 1$$

Parece un caso similar al anterior pero cada restricción representa un plano distinto y son planos paralelos, es decir que no hay puntos que cumplan ambas restricciones. El conjunto solución es el conjunto Vacío. Ni siquiera tiene dimensión ¿?.

Ej.: 13 Tres restricciones:

$$x + z = 6$$

$$x = z \quad \text{y}$$

$$z = 8$$

Esto parecería un caso sencillo de tres planos particulares que deberían cortarse en un punto, pero no es así, a pesar de no ser planos paralelos, los tres planos no se cortan entre si. La intersección de los dos primeros es una recta que resulta paralela al tercer plano, en conclusión, o hay conjunto que cumpla las tres restricciones.

Ej.: 14 Tres restricciones:

x + z = 6

x = z y

z = 3

Este caso parece similar al anterior pero los tres planos no solo se cortan en un punto, sino que se cortan en infinitos puntos. pues los tres se cortan en una misma recta. Parecen tres restricciones pero en realidad son solo 2. Al ser solo dos restricciones efectivas, el conjunto solución es un conjunto de una dimensión, es decir una recta.

Fijate que en todos estos casos hablamos de conjunto y no de espacios y menos de espacios vectoriales. Para que estos conjuntos sean espacios vectoriales deberían cumplir algunas condiciones más que la de ser simples conjuntos. Ya vamos a llegar a los espacios vectoriales, los sistemas de generadores, las bases y la Dependencia o Independencia Lineal, etc, etc

Desde el punto de vista de Sistemas de Ecuaciones

Ahora vamos a reinterpretar todos estos ejemplos pero planteándolos desde el punto de vista de sistemas de ecuaciones, vamos a ir desde el último al primero (si es que tienen sentido). Cuando hablamos de restricciones en forma de ecuaciones, estamos diciendo que las soluciones a las ecuaciones que usamos como restricciones deben ser los puntos del conjunto. Es decir que si un punto es del conjunto, debe cumplir con la o las ecuaciones, y si cumple con la o las ecuaciones, entonces pertenece al conjunto. Ahora trataremos de resolver los sistemas de ecuaciones

Primero clasificaremos los sistemas de ecuaciones, y las aclaraciones son para el caso de sistemas de 3x3 en R^3, es decir donde cada ecuación (o restricción ¡Ufa!) la podemos asimilar a un plano.

Vale recordar que resolver un sistema de ecuaciones es encontrar valores para cada variable, tales que cumplan simultáneamente las ecuaciones del sistema. El método es cualquiera que te permita hallarlos: triangulación, Pivote, regla de Cramer, Igualación, Sustitución o Bola de Cristal.

<table>
<tr><td rowspan="3">Sistemas</td><td rowspan="2">Compatibles (tienen solución)</td><td>Determinados</td><td>Tienen una única solución, cada ecuación puede ser representada por un plano y los tres planos se cortan en un punto</td></tr>
<tr><td>Indeterminados</td><td>Tienen infinitas soluciones, si bien hay tres ecuaciones, y cada una se representa como un plano, los tres planos se cortan en una única recta</td></tr>
<tr><td>Incompatibles</td><td colspan="2">No tienen solución, hay dos o tres planos paralelos o la intersección de dos de ellos da como resultado una recta paralela al tercer plano.</td></tr>
</table>

Ej.: 10 Tres restricciones del tipo plano oblicuo, dadas por:

x + y + z = 12

2 x – y + 2 z = 6

x – y –z = -4

Estas tres ecuaciones forman un sistema de 3x3, el sistema es compatible determinado, lo podés resolver como quieras. La solución es el punto (4;6;2), pues cumple las tres ecuaciones (el punto es único pues el sistema es determinado).

Ej.: 9 Dos restricciones del tipo plano oblicuo dadas por:

3 x – 2 y + 4 z = 12 y

6 x + 3 y + 2 z = 12

Aquí tenemos dos ecuaciones con tres incógnitas. Si tiene solución, no va a ser única (pues dos planos, si se cortan, o son coincidentes o se cortan en una recta). Será un sistema Compatible Indeterminado. Para resolverlo, podemos hacer lo siguiente, tratar de eliminar incógnitas sumando y restando ecuaciones.

Multiplico la primera ecuación por 2 y a esa le resto la segunda. Así obtengo:	Multiplico la segunda ecuación por 2 y le resto esa a la primera. Así obtengo:
2 (3 x – 2 y + 4 z = 12)	**3 x – 2 y + 4 z = 12**
<u>6 x + 3 y + 2 z = 12</u>	**<u>2 (6 x + 3 y + 2 z) = 12</u>**
0 x – 7 y +6 z = 12	**-9 x – 8 y + 0 z = -12**

o lo que es equivalente

z = 2 + 7/6 y

o lo que es equivalente

x = 12/9 - 8/9 y

ahora, si tomo un valor cualquiera de **y**, puedo con este valor calcular uno de **x** y uno de **z**, estos valores cumplirán ambas ecuaciones. y como puedo elegir cualquier valor para **y**, tendré muchas (infinitas) soluciones distintas para el sistema.

Ej.: 8 Dos restricciones del tipo plano oblicuo y plano paralelo a un eje dadas por:

x + 2 y + z = 4 y

x + z = 2

Similar al Ej. 9

Para resolverlo fácil, tomo un valor para **z** y calculo el de **x** con la segunda ecuación, luego con la primera calculo el de **y**.

Así tendré una solución distinta para cada valor de z que puedo elegir arbitrariamente.

Ej.: 7 Dos restricciones:

una ecuación $5x+10y+4z=20$ (plano oblicuo)

y otra **z=2** (plano paralelo al piso)

Este sistema es sencillo, antes vamos a escribirlo como sistema, simplemente poniéndolo con una llave

$$\begin{cases} 5x+10y+4z=20 \\ z=2 \end{cases}$$

La solución está servida, reemplazo **z** por 2 en la primera ecuación y luego elijo un valor para **y** (o **x**) y calculo el correspondiente para **x** (o **y**). Nuevamente un Sistema Compatible Indeterminado con infinitas soluciones

Ej.: 6 Dos restricciones del tipo planos paralelos a los ejes coordenados, dadas por:

x + z = 4 y

x + 2y = 8

Para resolver este, nuevamente elegimos un valor cualquiera para **x** (pues está en ambas ecuaciones) y luego calculamos el de **z** (despejando de la primera ecuación) y el de **y** (despejándolo de la segunda)

Ej.: 5 Dos restricciones correspondientes a planos paralelos a los planos coordenados, dadas por:

z = 4 y

x = 3

Más fácil que "robarle un dulce a un niño", **x** vale 3, **z** vale 4 e **y** vale lo que vos quieras, se acabó. Sistema Compatible Indeterminado, Infinitas soluciones, una para cada valor de **y** que vos elijas.

Ej.: 4 Otra restricción solitaria, el conjunto que obtenemos es de 2 dimensiones

$$5x+10y+4z=20$$

Esto la verdad que no parece un sistema, es una ecuación solita, una solución para ella sería encontrar un punto del plano que la representa. Elegí un valor para **x**, uno para **y** reemplazalos en la ecuación y luego despeja **z**. Ya tenés una solución

Ej.: 3 Ecuación **x+z=6**.

Otro caso trivial, Elegí un valor para **z** y calcula el de **x** despejando. ¿Y **y**? o mejor dicho: ¿qué valor debe tomar **y**?.

El que vos quieras, elegí uno y listo.

Ahora vamos a ver casos particulares, donde los sistemas no son lo que parecen

Ej.: 15 **x + z = 6**

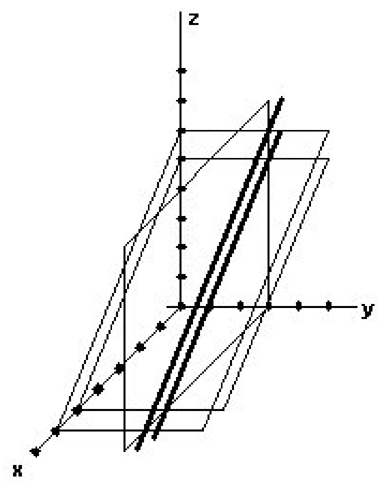
2x + 2z = 10

y = 3

Parece fácil, **y** vale 3, pero ...

si la primera ecuación la multiplico por 2 y le resto la segunda, que pasa:

2 (x + z = 6)



$2x + 2z = 10$

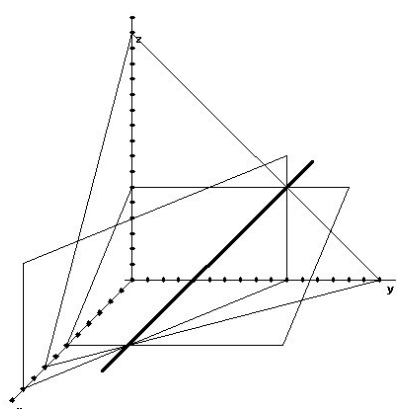
$0x + 0z = 2$

Es decir que 0=2, este resultado absurdo indica que el sistema es Incompatible. En realidad las dos primeras ecuaciones representarían planos paralelos.

Ej.: 16 $x + z = 6$

$x + y = 10$

$2x + y + z = 16$



¿Y este? Es uno de 3x3 sin complicaciones.

Veamos que pasa al resolverlo por sustitución:

despejamos **z** de la primera e **y** de la segunda

$z = 6 - x$

$y = 10 - x$

ahora sustituyo en la tercera

$2x + (10-x) + (6-x) = 16$

$2x + 10 - x + 6 - x = 16$ **$16 = 16$**

este resultado no es absurdo como el del ejemplo anterior, es un resultado que indica una identidad que se cumple para cualquier valor de **x**, nuevamente podemos elegir un valor para **x** y calcular los de **y** y **z**. Tendremos Infinitas soluciones. Es que estas ecuaciones no son tres independientes sino que la tercera es la suma (una combinación lineal) de las dos primeras. Hablando de planos, los planos representados por estas ecuaciones se cortan todos en una misma recta