ECUACIÓN DEL PLANO, TODAS SUS FORMAS

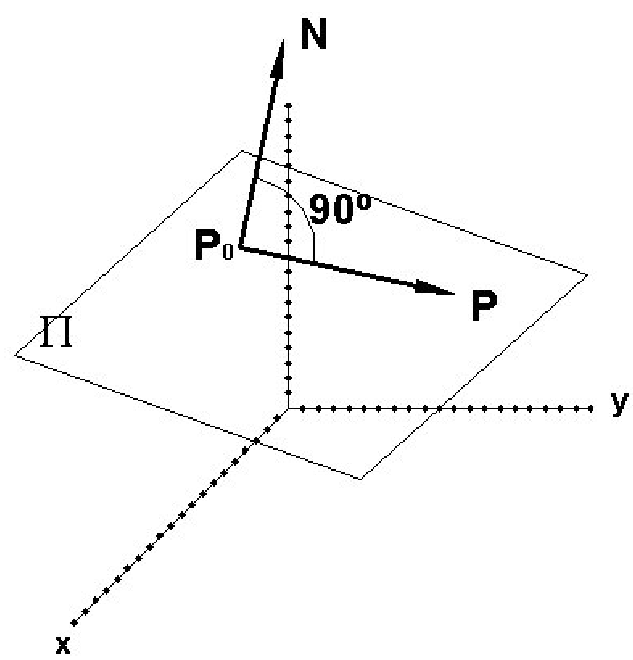
Presentación: aquí pretendo desarrollar las formas de la ecuación del plano más utilizadas en Álgebra (no todas las formas, deben existir otras más). Aquí trabajamos en R^3 y vamos a presentar como, desde una forma básica (que llamamos vectorial), podemos llegar a las otras formas y como interpretar casos especiales. Incluiremos ejemplos de casos particulares y su interpretación en las formas pertinentes.

¿QUÉ ES UN PLANO?

Ni idea, pero me lo imagino. Vamos a plantear una forma de determinar puntos de un plano que, además de ser fácil de ver, es una de las más utilizadas.

Vamos a tratar de definir una ecuación del plano Π (Pi mayúscula). Para eso necesitamos un punto perteneciente al plano $\mathbf{P_0=(x_0;y_0;z_0)}$ y un **vector libre** normal al plano (es decir perpendicular al plano) $\mathbf{N=(N_x;N_y;N_z)}$.

Recordar que un **Vector Libre** es aquel del cual sólo me interesa la dirección y no el punto de aplicación ni el módulo, ni el sentido.



Si el punto genérico **P=(x;y;z)** pertenece al plano Π entonces el vector $\mathbf{P_0P}$ debe ser perpendicular al vector Normal **N**. La forma de indicar mediante operaciones que dos vectores son normales es mediante el producto escalar de vectores (algunos lo llaman producto punto "●") si el producto escalar de dos vectores es nulo, los vectores son normales u ortogonales. Lee "**Multiplicando Vectores**" que podés descargar de la sección **Clases de Apoyo**>**Álgebra** en **www.unamuno.com.ar**.

El producto escalar de dos vectores se puede calcular de dos maneras:

Sean $\mathbf{A=(A_x;A_y;A_z)}$ y $\mathbf{B=(B_x;B_y;B_z)}$ y **|A|** y **|B|** sus respectivos módulos ("el largo" de los vectores) y α el ángulo entre ellos.

Multiplicando componente a componente y sumando los productos

$$\mathbf{A\bullet B = A_x.B_x+A_y.B_y+A_z.B_z}$$

Otra, Multiplicando los módulos entre sí y por el coseno del ángulo comprendido entre los vectores

$$\mathbf{A\bullet B= |A|.|B|.\cos\alpha}$$

Entonces: $$\mathbf{A\bullet B = A_x.B_x+A_y.B_y+A_z.B_z = |A|.|B|.\cos\alpha}$$

Si los vectores son normales, α**=90,** entonces **A●B** es cero pues **cos 90 = 0**.

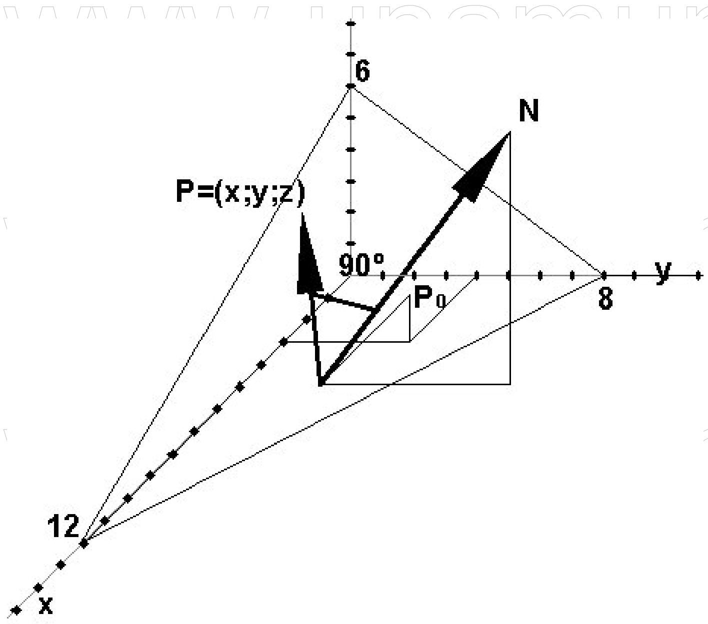
Ahora volviendo al plano. $\mathbf{P_0P}$ debe ser perpendicular al normal **N** (¿y si no porque se llama normal?). escribiendo la ecuación sería $\mathbf{P_0P\bullet N=0}$, o tomando los puntos como vectores $\mathbf{(P-P_0)\bullet N=0}$. como $\mathbf{(P-P_0)=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)}$, desarrollando el producto componente a componente obtenemos

$$\mathbf{(P-P_0)\bullet N=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\bullet N=(x-x_0;y-y_0;z-z_0)\bullet(N_x;N_y;N_z)= (x-x_0).N_x+(y-y_0).N_y+(z-z_0).N_z)=0}$$

Y esta última igualdad es la forma implícita del la ecuación del plano. Las variables son **x;y;z** , es decir las coordenadas de un punto cualquiera del plano. Es más podríamos hacer la distributiva en cada termino y obtendríamos una ecuación del tipo **a.x+b.y+c.z+d=0**.

$\mathbf{x.N_x+y.N_y+z.N_z+(-x_0.N_x-y_0.N_y-z_0.N_z)=0}$

Veamos si el gráfico siguiente sirve para aclarar.



El punto $\mathbf{P_0}$ tiene como coordenadas a **(3;4;1.5)**

El vector Normal tiene componentes **(4;6;8)**

Planteo $\mathbf{(P-P_0)\bullet N=0}$.

((x-3);(y-4);(z-1.5))●(4;6;8)=0

4.(x-3)+6.(y-4)+8.(z-1.5)=0

4.x-12+6.y-24+8.z-12=0

4.x+6.y+8.z-48=0

Esta es la forma implícita

La forma segmentaria será

$$\frac{x}{12}+\frac{y}{8}+\frac{z}{6}=1$$

Aclaración: para pasar de la forma implícita a la segmentaria se procede de la siguiente manera:

Paso el termino independiente al otro miembro de la ecuación	**4.x+6.y+8.z=48**
Divido ambos miembros de la igualdad por el termino independiente	$\frac{4.x+6.y+8.z}{48}=\frac{48}{48}$
Aplico la distributiva y simplifico para que el numerador quede en 1	$\frac{x}{12}+\frac{y}{8}+\frac{z}{6}=1$

Ya hemos pasado de la forma vectorial $\mathbf{(P-P_0)\bullet N=0}$ a la forma implícita **a.x+b.y+c.z+d=0**

Resumiendo: si tengo un punto $\mathbf{P_0=(x_0;y_0;z_0)}$ y un vector Normal. la forma más cómoda de la ecuación del plano es la vectorial $\mathbf{(P-P_0)\bullet N=0}$, para pasar a la implícita simplemente planteo **a.x+b.y+c.z+d=0** con $\mathbf{a=N_x}$, $\mathbf{b=N_v}$ y $\mathbf{c=N_z}$, para determinar el valor del término independiente **d** escribo la ecuación $\mathbf{N_x.x_0+N_y.y_0+N_z.z_0+d=0}$ con las coordenadas de $\mathbf{P_0}$, y despejo **d**.

CAMINO DE VUELTA:

¿Y si me dan la forma implícita **a.x+b.y+c.z+d=0** y quiero llegar a la forma vectorial $\mathbf{(P-P_0)\bullet N=0}$?

Muy simple, tomo **N=(a;b;c)** y me hace falta un punto cualquiera del plano para tomarlo como $\mathbf{P_0}$, pero si tengo la ecuación del plano tengo las coordenadas de todos sus puntos, invento un valor para $\mathbf{x_0}$ uno para $\mathbf{y_0}$ y reemplazando en **a.x+b.y+c.z+d=0** despejo **z** que será $\mathbf{z_0}$. y esos tres valores son las coordenadas de $\mathbf{P_0}$. y la ecuación será $\mathbf{(P-P_0)\bullet N=0}$

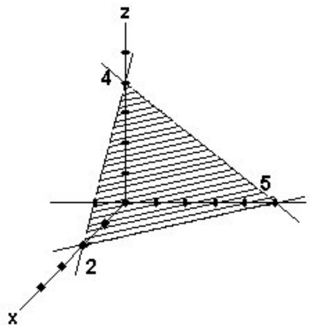
FORMA SEGMENTARIA.

Esta es en definitiva una ecuación implícita igualada a 1.

$$\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$$

Aquí **p**, **q** y **r** son los puntos dónde el plano corta a los ejes **x**, **y** y **z** respectivamente

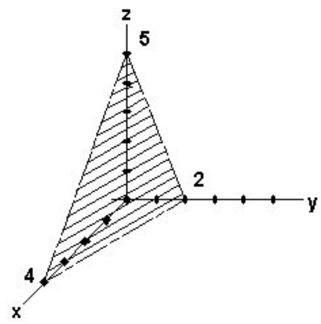
Veamos unos gráficos.



$$\frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{4}=1$$

Paso a al forma implícita multiplicando por 20 ambos miembros de la igualdad

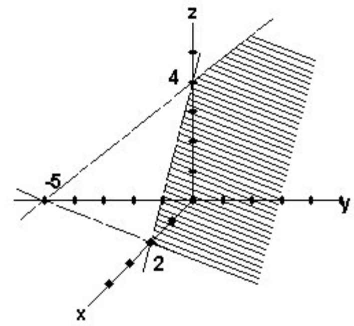
10.x+4.y+5.z=20



$$\frac{x}{4}+\frac{y}{2}+\frac{z}{5}=1$$

Idem

5.x+10.y+4.z=20



$$\frac{x}{2}+\frac{y}{-5}+\frac{z}{4}=1$$

¿Por qué uso el 20?

Porque es un valor que se puede dividir por 2, por 5 y por 4

La apreciación de esta ecuación es obvia, sea para el primer ejemplo.

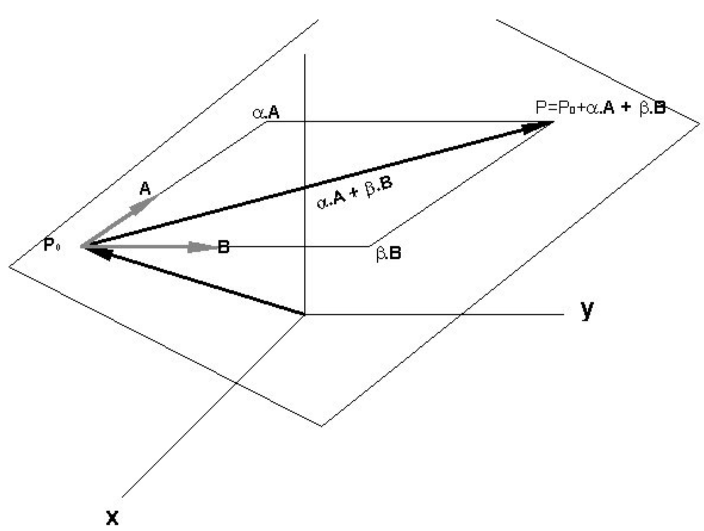
Si **y=0** y **z=0** (hablamos del eje x) para que se cumpla la ecuación $\frac{x}{2}+\frac{y}{5}+\frac{z}{4}=1$ debe ser $\frac{x}{2}=1$ es decir **x=2**.

FORMA VECTORIAL PARAMÉTRICA

Ahora vamos a hablar de la forma vectorial paramétrica de la ecuación del plano. Que es un poco más complicada.

Para definir el plano de esta forma, necesito: un punto $\mathbf{P_0}$ perteneciente al plano y dos vectores paralelos al plano o pertenecientes al plano, pero no paralelos entre si, **A** y **B**. Entonces puedo decir que todos los puntos del plano pueden obtenerse mediante la expresión $\mathbf{P=P_0+\alpha.A+\beta.B}$ con α y β escalares.

Es decir que un punto cualquiera del plano estaría dado por el $\mathbf{P_0}$ más una **Combinación Lineal** de **A** y **B**.



Los escalares α y β, llamados parámetros, son las coordenadas del punto **P** en el sistema de coordenadas con origen en $\mathbf{P_0}$ y con ejes definidos por **A** y **B** (que no necesariamente son ortogonales entre si).

Si el punto **P** de coordenadas **(x;y;z)** dadas pertenece al plano, el sistema que surge de plantear $\mathbf{P=P_0+\alpha.A+\beta.B}$ será **Compatible Determinado**. Si el punto no pertenece al plano el sistema será Incompatible.

Expresando la ecuación anterior componente a componente:

$\mathbf{(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0) + \alpha.(Ax;A_y;A_z)+\beta.(B_x;B_y;B_z)}$

Igualando componente a componente obtenemos el sistema mencionado

$\mathbf{x=x_0+ \alpha.Ax+\beta.B_x}$

En este sistema, los datos son:
x;y;z las coordenadas de P

$y=y_0 + \alpha.A_y+\beta.B_y$ — $A_x;A_y;A_z$ las componentes de A

$z=z_0 + \alpha.A_z+\beta.B_z$ — $B_x;B_y;B_z$ las componentes de B

y las incógnitas α y β

Ya hemos visto las tres formas más usuales de la ecuación del plano.

Forma Vectorial	$(P-P_0) \bullet N=0$
Forma Implícita y Segmentaria	**a.x+b.y+c.z+d=0** y $\frac{x}{p}+\frac{y}{q}+\frac{z}{r}=1$
Forma Vectorial Paramétrica	$(x;y;z)=(x_0;y_0;z_0) + \alpha.(Ax;A_y;A_z)+\beta.(B_x;B_y;B_z)$

¿CÓMO PASAMOS DE UNA FORMA A OTRA?

Al inicio del documento explicamos como pasar de la **Vectorial** a la **Implícita** y de la **Implícita** a la **Vectorial**

Ahora veamos otros “pases”.

DE LA FORMA VECTORIAL PARAMÉTRICA A LA VECTORIAL.

En la forma Vectorial Parámetrica tengo un punto del plano (**P_0**) y dos vectores paralelos al plano (**A** y **B no paralelos entre si**), para la forma Vectorial necesito un punto y un vector normal. Bueno sólo debo hacer **N=AxB**, dónde **x** es el producto vectorial de los vectores, es un producto que da como resultado un vector perpendicular a los dos vectores multiplicados. Para hacer este Producto Vectorial se puede utilizar una matriz o la expresión sugerida a continuación:

$$A\times B=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \mathbf{Ax} & \mathbf{Ay} & \mathbf{Az} \\ \mathbf{Bx} & \mathbf{By} & \mathbf{Bz} \end{vmatrix}$$

$AxB=(A_y.B_z-A_z.B_y \; ; \; A_z.B_x-A_x.B_z \; ; \; A_x.B_y-A_y.B_x)$

Ya tengo a **N=AxB** y puedo plantear **$(P-P_0) \bullet N=0$**

“Listo el pollo”

DE LA FORMA VECTORIAL A LA VECTORIAL PARAMÉTRICA (PASANDO POR LA IMPLÍCITA)

La forma más elegante es primero pasar a la forma implícita, luego despejar una de las variables en función de las otras, y descomponer el punto genérico **(x;y;z)** imponiendo la restricción de la ecuación del plano.

Veámoslo con un ejemplo:

Sea la ecuación Vectorial **$(P-P_0).N=0$,** (con P=(x;y;z))

Con **$P_0=(0;0;4)$** y **N=(1;-2;2) y** P=(x;y;z)

1. Replanteo la ecuación **((x;y;z)-(0;0;4)) • (1;-2;2)=0**	2. Hago la resta **$P-P_0$** **(x;y;z-4) • (1;-2;2)=0**
3. Resuelvo el producto escalar **x.1+y.(-2)+(z-4).2=0**	4. Resuelvo **x-2y+2z-8=0**

Tengo la ecuación implícita: **x-2.y+2.z=8**

Ahora pasaré a la forma Vectorial Paramétrica:

Despejo **x** (podría ser **y** o **z**), pero en este caso con **x** es más sencillo

x=8+2.y-2.z

5. en un punto P genérico (x;y;z) reemplazo **x** por esa expresión:

(x;y;z)=(8+2.y-2.z;y;z)

6. Descompongo el segundo termino en tres vectores para separar **y** , **z** y el término independiente

(x;y;z)=(8;0;0)+(2.y;y;0)+(-2z;0;z)

7. Saco “factor común” la **z** y la **y**

(x;y;z)=(8;0;0)+y.(2;1;0)+z.(-2;0;1)

8. Ya está, llamo α a **y**, y β a **z** y tengo una de las tantas ecuaciones vectoriales paramétricas que representan el plano

(x;y;z)=(8;0;0) + α.(2;1;0) + β.(-2;0;1)

De la forma Vectorial Paramétrica a la Implícita.

Un mecanismo sería pasarla primero a la forma Vectorial (ya lo hemos explicado) y luego de esta forma a la implícita (también lo hemos explicado). Otro camino más directo pero quizás más engorroso es eliminar los parámetros del sistema planteado al analizar la forma vectorial paramétrica.

Veamos ☹

$x=x_0+\alpha.A_x+\beta.B_x$

$y=y_0+\alpha.A_y+\beta.B_y$

$z=z_0+\alpha.A_z+\beta.B_z$

Si, de estas tres ecuaciones, mediante igualación, sustitución o sumas y restas consigo eliminar los parámetros α y β, obtendré un sola ecuación que será la forma implícita, es un procedimiento engorroso.

Haciéndolo por determinantes (es un lindo merengue, más adelante hay un método más piola)

¡¡¡¡PASA POR ALTO ESTE MÉTODO!!!!!

te lo advertí

$x-x_0=\alpha.A_x+\beta.B_x$ ①

$y-y_0=\alpha.A_y+\beta.B_y$ ②

$z-z_0=\alpha.A_z+\beta.B_z$ ③

de ① y ②

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}(x-x\mathbf{0}) & Bx\\(y-y\mathbf{0}) & By\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Ax & Bx\\Ay & By\end{vmatrix}}=\frac{(x-x\mathbf{0})\,.\,By-(y-y\mathbf{0})\,.\,Bx}{Ax\,.\,By-Ay\,.\,Bx}$$

de ②③

$$\alpha=\frac{\begin{vmatrix}(y-y\mathbf{0}) & By\\(z-z\mathbf{0}) & Bz\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}Ay & By\\Az & Bz\end{vmatrix}}=\frac{(y-y\mathbf{0})\,.\,Bz-(z-z\mathbf{0})\,.\,By}{Ay\,.\,Bz-Az\,.\,By}$$

Igualando para eliminar α

$$\frac{(x-x0)\,.\,By-(y-y0)\,.\,Bx}{Ax\,.\,By-Ay\,.\,Bx}=\frac{(y-y0)\,.\,Bz-(z-z0)\,.\,By}{Ay\,.\,Bz-Az\,.\,By}$$

Ya llegamos a la ecuación del plano en forma implícita, (Menudo merengue).

Hay un mecanismo más piola y es plantear el sistema de ecuaciones y resolverlo triangulando, luego determinar los valores de **x;y;z** para los cuales el **Sistema es Compatible** (Determinado o no)

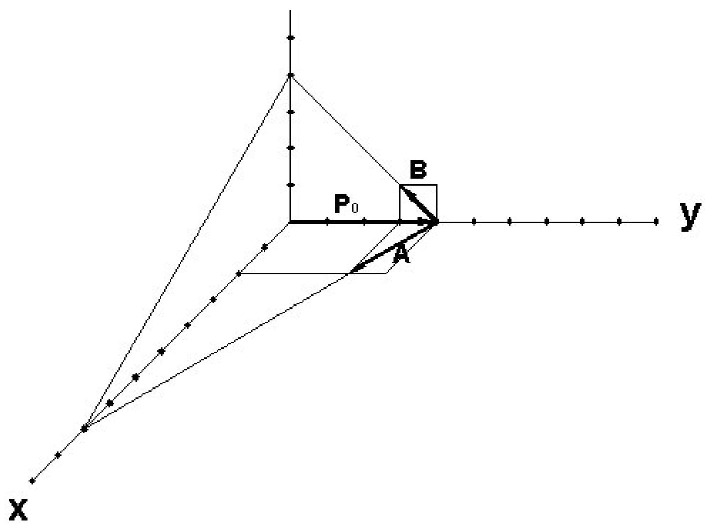
Veamos un ejemplo

Sea el Plano determinado por la ecuación Vectorial paramétrica **(x;y;z)=(0;4;0)+α.(2;-1;0)+β.(0;-1;1)**

Es decir que pasa por P_0=**(0;4;0)** y los vectores paralelos a él son **(2;-1;0)** y **(0;-1;1)**.

El sistema planteado debe ser compatible, es decir que para cualquier **P=(x;y;z)** perteneciente al plano, deben existir un α y un β que cumplan con la/las ecuación/es. ¿Qué ecuación/es?, esta/s

(x;y;z)=(0;4;0)+α.(2;-1;0)+β.(0;-1;1)



1. Planteo el Sistema de ecuaciones, componente por componente

x=0+ α.2+β.0

y=4 + α.(-1)+β.(-1)

z=0 + α.0+β.1

2. Re-escribo el sistema

2.α+β.0 = x

-1.α-1.β=y-4

0.α+1.β=z

3. Planteo la matriz ampliada

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & x \\ -1 & -1 & y-4 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix}$$

4. Cambio la fila 1 por la 2

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & y-4 \\ 2 & 0 & x \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix}$$

5. Cambio la fila 2 por la 3

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & y-4 \\ 0 & 1 & z \\ 2 & 0 & x \end{vmatrix}$$

6. A la fila 3 le sumo el doble de la 1

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & y-4 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & -2 & x+2.(y-4) \end{vmatrix}$$

7. A la fila 3 le sumo el doble de la 2

$$\begin{vmatrix} -1 & -1 & y-4 \\ 0 & 1 & z \\ 0 & 0 & x+2.(y-4)+2.z \end{vmatrix}$$

Ahora, para que el sistema sea Compatible, el rango de la matriz y el rango de la matriz ampliada deben ser iguales, esto ocurre cuando **x+2.(y-4)+2z** sea **0**, Entonces el sistema será compatible. Es decir que si los puntos cumplen esa ecuación el sistema será Compatible. Dicho de otra manera, esa es la ecuación implícita del plano. Aplicando la distributiva e igualando a 1, obtenemos la forma segmentaria:

X+2.y-8+2.z=0

X+2.y+2.z=8

$$\frac{x}{8}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1$$

Que coincide con el plano de la ilustración inicial.

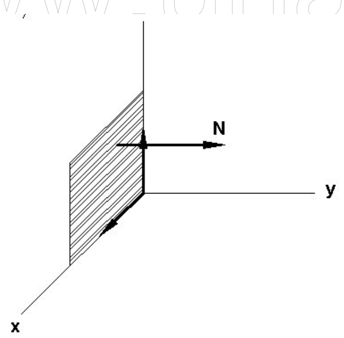
Aquí se muestra que triangulando las cosas son más sencillas. Si no manejás muy bien la triangulación de matrices, descargá "**Triangulando soy feliz**" en la sección **Clases de Apoyo**>**Álgebra** de **www.unamuno.com.ar**

Te dejo a vos usar el método mencionado antes de este, que consistía en usar determinantes, para despejar α o β e igualar..

CASOS PARTICULARES

Veamos algunos ejemplos de planos particulares, y el análisis que podemos hacer de sus ecuaciones.

Plano coordenado x-z.



Un punto del plano es el origen **P_0=(0;0;0)**

Un vector normal es **N=(0;1;0)**

La ecuación Vectorial es:

((x;y;z)-(0;0;0))●(0;1;0)=0

Si desarrollamos la expresión anterior:

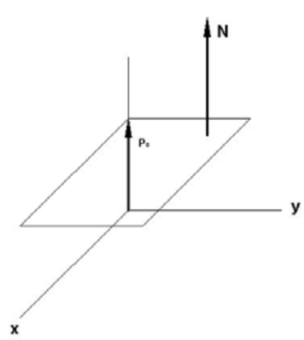
llegamos a **y=0**

La forma implícita de la ecuación de este plano es .... **y=0**, Forma segmentaria no tiene.

La forma Vectorial Parametrica la podemos hacer con los vectores que están representados en el dibujo **(1;0;0)** y **(0;0;1)** y quedaría así:

(x;y;z)=(0;0;0)+α.(1;0;0)+β.(0;0;1)

Plano paralelo al coordenado x-y a una altura "h".



Un punto del plano es **P_0=(0;0;h)**

Un vector normal es **N=(0;0;1)**

La ecuación Vectorial es:

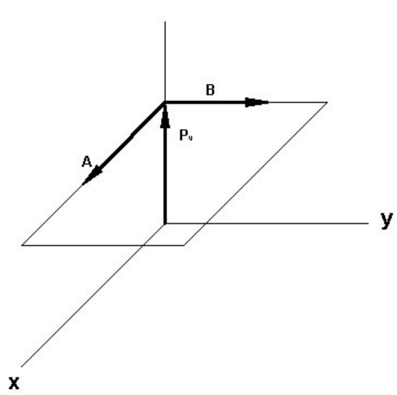
((x;y;z)-(0;0;h))●(0;0;1)=0

Si desarrollamos la expresión anterior:

llegamos a **(z-h)=0**

La forma implícita de la ecuación de este plano es .... **z=h**, La forma segmentaria es:

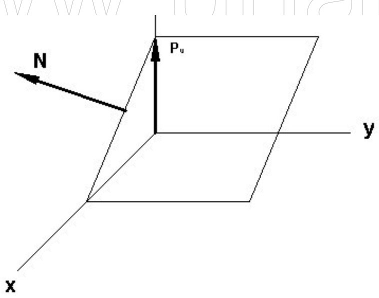
$$\frac{z}{h}=\mathbf{1}$$



La forma Vectorial Parametrica la podemos hacer con el punto del plano **P_0=(0;0;h)** y los vectores que están representados en el dibujo **A=(1;0;0)** y **B=(0;1;0)** y quedaría así:

(x;y;z)=(0;0;h)+α.(1;0;0)+β.(0;1;0)

Plano paralelo al eje “y”.



Un punto del plano es $\mathbf{P_0=(0;0;h)}$

Un vector normal es **N=(1;0;1)** el vector es paralelo al plano x-z

La ecuación Vectorial es:

((x;y;z)-(0;0;h))●(1;0;1)=0

Si desarrollamos la expresión anterior:

llegamos a **x+(z-h)=0**

La forma implícita de la ecuación de este plano es .... **x+z=h**, La forma segmentaria es:

$$\frac{x}{h}+\frac{z}{h}=\mathbf{1}$$

Para pasar de la forma implícita a la Vectorial paramétrica despejamos la **x** como **x=h-z**

en un punto genérico **(x,y;z)** reemplazamos la **x** por esa restricción y obtenemos

(x;y;z)=(h-z;y;z)

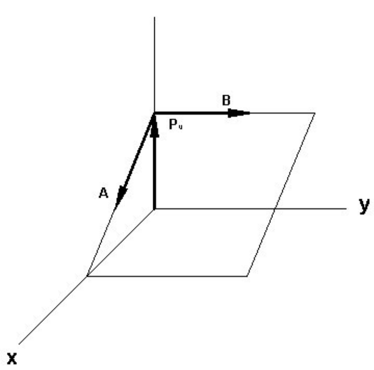
Descomponemos el vector

(x;y;z)= (h;0;0) + (-z;0;z) + (0;y;0)

Sacamos factor común **z** e **y**

(x;y;z)= (h;0;0) +z (-1;0;1) +y (0;1;0)

Esta es una de las formas Vectoriales Paramétricas.



Otra forma Vectorial Parametrica la podemos hacer con un punto $\mathbf{P_0=(0;0;h)}$ y los vectores que están representados en el dibujo **A=(1;0;-1)** y **B=(0;1;0)** y quedaría así:

(x;y;z)=(0;0;h)+α**.(1;0;-1)+**β**.(0;1;0)**

La diferencia entre esta y la obtenida en el párrafo anterior es el sentido del vector **A**

Pero ambas ecuaciones son correctas

CONCLUSIÓN: en este documento se han presentado las formas más frecuentes de la ecuación del plano. Un método en particular es importante para luego ser usado en el tema ESPACIOS VECTORIALES, es el pasaje de la forma Vectorial Paramétrica a la forma Implícita mediante la triangulación del sistema de ecuaciones que surge de plantear las ecuaciones componente a componente.

Otro pase importante es el de la Forma Implícita a la Vectorial Paramétrica mediante la descomposición del punto genérico (x;y;z) al cual se han aplicado las restricciones correspondientes al plano