TRIANGULANDO SOY FELIZ

Y SI SOY FELIZ ES PORQUE TE TENGO A TI

LA GENTE ME VE,

VOLANDO POR LAS NUBES HACIA EL SOL

Y NO PUEDE CREER LO QUE VE...

(ESTO ES PARTE DE UNA CANCIÓN DE UN GRUPO LLAMADO ***LOS TIOS QUERIDOS***, QUIENES TENGAN MÁS DE 45 QUIZÁS LO RECUERDEN), VOLVAMOS AL ÁLGEBRA...

Presentación: aquí vamos a ver sin dibujos ni cosas por el estilo, un método para operar con matrices que sirve para muchas cosas (obviamente todas relacionadas entre si). Es importante no tenerle miedo a la Triangulación, y el miedo se pierde haciendo muchos ejercicios, uno tras otro. Dominando el arte de triangular, los Espacios Vectoriales son "pan Comido".

¿QUÉ ES UN TRIANGULAR?

Triangular es hacer operaciones (validas) sobre las filas de matrices (cuadradas o no) y obtener de esa manera matrices equivalentes, es decir que representas elementos equivalentes (por ejemplo ecuaciones equivalentes). Ojo que siempre hablamos de operaciones entre filas, no entre columnas. Luego de estas operaciones vamos a tener una matriz equivalente con los elementos que quedan debajo de la diagonal principal (todos Nulos).

Matriz no triangulada

$$\begin{pmatrix} 3 & 7 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & -5 & 6 \\ -4 & -1 & 0 & 9 \\ 9 & 8 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Matriz triangulada

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 9 & 8 & 9 & 8 & -2 \\ 0 & 9 & 0 & 9 & 0 & 90 & 89 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & -2 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Cuáles son la operaciones que se pueden hacer entre filas (las válidas).

Cambiar de lugar las filas, o sea cambiar una fila por otra

Multiplicar o dividir una fila por un mismo valor.

Sumar o restar una fila a otra.

Sumar a una fila una combinación lineal de otras filas (esto es consecuencia de las anteriores). Una combinación lineal es una suma o resta de filas multiplicadas o divididas cada una por un escalar

Un escalar es un número real a secas)

Operaciones no válidas

Sumar un escalar a una fila

Multiplicar dos filas entre sí.

Eliminar filas alegremente.

¿Para que me sirve Triangular una matriz?

Si estoy con sistemas de ecuaciones, para hallar un sistema equivalente (que tenga los mismos valores solución) pero más sencillo.

Si trabajo en Espacios Vectoriales, para detectar Dependencias Lineales entre vectores y saber si son bases o no, o para partir de un Sistema de Generadores de un Sub Espacio Vectorial y obtener la ecuación que representa a ese Sub Espacio Vectorial.

Para no aburrirme.... ¿?

Para hallar la inversa de una matriz.

Vamos a ver como triangular con unos ejemplos sencillos que deben dar valores redondos y fáciles de calcular.

A las filas las vamos a representar con F1, F2, F3, ...

Una matriz de 3x3

$$\begin{array}{c} F1 \\ F2 \\ F3 \end{array} \begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} & \mathbf{7} \\ \mathbf{6} & \mathbf{4} & \mathbf{18} \\ \mathbf{6} & \mathbf{2} & \mathbf{19} \end{pmatrix}$$

Hacemos F2 – 2 . F1 y

F3 – 2 . F1

Porque hacemos estas operaciones, la cosa está media cantada, haciendo estas operaciones convertimos en 0 los primeros valores de F2 y F3 y así nos acercamos a nuestro objetivo

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 6-2.3 & 4-2.1 & 18-2.7 \\ 6-2.3 & 2-2.1 & 19-2.7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 7 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Ya está.

Muy fácil, salió de primera

Algo que podemos decir siempre, no importa para que uses las matrices es que si al triangular no se te anula fila alguna, las filas son **Linealmente Independientes** entre si, es decir que ninguna fila puede obtenerse como **combinación lineal** de las otras. Otro concepto importante es el de **Rango**. El rango de una matriz es la **cantidad de filas Linealmente Independientes** que tiene una matriz. En el ejemplo anterior es 3.

Otro ejemplo facilísimo.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 5 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

La F4 la pongo en primer lugar

La F2 en tercer lugar

La F3 la mano debajo de todo,

ordenando las filas ya se resolvió

$$= \begin{pmatrix} 3 & 5 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Una matriz de 4 filas por 6 columnas

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -4 & 5 & 4 \\ 8 & 17 & 0 & -5 & 17 & 13 \\ 4 & 4 & 8 & -5 & 0 & -3 \\ 20 & 38 & 3 & -16 & 32 & 26 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} F2-2.F1 \\ F3-F1 \\ F4-5.F1 \end{array} \Bigg| = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -4 & 5 & 4 \\ 8-2.4 & 17-2.7 & 0-2.1 & -5-2.(-4) & 17-2.5 & 13-2.4 \\ 4-4 & 4-7 & 8-1 & -5-(-4) & 0-5 & -3-4 \\ 20-5.4 & 38-5.7 & 3-5.1 & -16-5.(-4) & 32-5.5 & 26-5.4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & -3 & 7 & -1 & -5 & -7 \\ 0 & 3 & -2 & 4 & 7 & 6 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} \\ \\ F3+F2 \\ F4-F2 \end{array} \Bigg| = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 1 & -4 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -2 & 3 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

demasiado fácil....

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 9 & 14 \\ 3 & 10 & 23 & 36 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{c} F2-F1 \\ F3-F1 \\ F4-3.F1 \end{array} \Bigg| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \\ 0 & 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{8} \\ \mathbf{0} & \mathbf{4} & \mathbf{8} & \mathbf{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{10} & \mathbf{20} & \mathbf{30} \end{pmatrix} \quad F\mathbf{3}-F\mathbf{2} \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 20 & 30 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 10 & 20 & 30 \end{pmatrix} \quad \mathbf{4}.F\mathbf{4}/\mathbf{10} \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix}$$

Acá con la F4 no hacemos otra cosa que multiplicarla por 4 y dividirla por 10 para que las cuentas sean más sencillas luego

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 8 & 12 \end{pmatrix} \quad F\mathbf{4}-F\mathbf{2} \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix} \quad F\mathbf{4}-F\mathbf{3} \quad = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ La última fila es Comb. Lineal de las tres primeras

¿y si me aparecen fracciones?, ¡me la banco!, sino vean este ejemplo, donde vamos a convertir en 1 el primer elemento no nulo de cada fila para luego multiplicar la fila por el pivote ¿? y restársela o sumársela a la fila actual

$$\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{4} & -\mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & -\mathbf{2} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & -\mathbf{4} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & -\mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \text{Haciendo } F\mathbf{1}/\mathbf{3} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4}/\mathbf{3} & -\mathbf{2}/\mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & -\mathbf{2} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & -\mathbf{4} & -\mathbf{2} \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & -\mathbf{4} & \mathbf{3} \end{pmatrix} \text{Haciendo } \begin{matrix} F\mathbf{2}-\mathbf{4}.F\mathbf{1} \\ F\mathbf{3}-\mathbf{5}.F\mathbf{1} \\ F\mathbf{4}-\mathbf{4}.F\mathbf{1} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4}/\mathbf{3} & -\mathbf{2}/\mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{4}-\mathbf{4.1} & \mathbf{5}-\mathbf{4.4}/\mathbf{3} & -\mathbf{2}-\mathbf{4}.(-\mathbf{2}/\mathbf{3}) & -\mathbf{2}-\mathbf{4.1} \\ \mathbf{5}-\mathbf{5.1} & \mathbf{6}-\mathbf{5.4}/\mathbf{3} & -\mathbf{4}-\mathbf{5}.(-\mathbf{2}/\mathbf{3}) & -\mathbf{2}-\mathbf{5.1} \\ \mathbf{4}-\mathbf{4.1} & \mathbf{5}-\mathbf{4.4}/\mathbf{3} & -\mathbf{4}-\mathbf{4}.(-\mathbf{2}/\mathbf{3}) & \mathbf{3}-\mathbf{4.1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4}/\mathbf{3} & -\mathbf{2}/\mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}/\mathbf{3} & \mathbf{2}/\mathbf{3} & -\mathbf{6} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{2}/\mathbf{3} & -\mathbf{2}/\mathbf{3} & -\mathbf{7} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}/\mathbf{3} & -\mathbf{4}/\mathbf{3} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$$ haciendo F3/($-^{1}/_{3}$)

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{4}/\mathbf{3} & -\mathbf{2}/\mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & -\mathbf{2} & +\mathbf{18} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{2}/\mathbf{3} & -\mathbf{2}/\mathbf{3} & -\mathbf{7} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1}/\mathbf{3} & -\mathbf{4}/\mathbf{3} & -\mathbf{1} \end{pmatrix} \text{Haciendo } \begin{matrix} F\mathbf{3}+\mathbf{2}/\mathbf{3}.F\mathbf{2} \\ F\mathbf{4}+\mathbf{1}/\mathbf{3}.F\mathbf{2} \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & +18 \\ 0 & -2/3+2/3.1 & -2/3+2/3.(-2) & -7+2/3.18 \\ 0 & -1/3+1/3.1 & -4/3+1/3.(-2) & -1+1/3.18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & +18 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Haciendo $F4-F3$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 4/3 & -2/3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & +18 \\ 0 & 0 & -2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Un último ejemplo con una matriz rectangular de 5 filas por 3 columnas (5x3) aplicando el mismo mecanismo de hacer 1 el primer elemento no nulo de la fila.

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$ Divido F1 por 4 $$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -5/4 \\ 3 & 1 & 2 \\ 8 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 9 & -2 \end{pmatrix}$$ Haciendo $F2-3.F1$, $F3-8.F1$, $F4-2.F1$, $F5-4.F1$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 1-3.1/2 & 2-3.(-5/4) \\ 0 & 1-8.1/2 & 4-8.(-5/4) \\ 0 & 1-2.1/2 & 3-2.(-5/4) \\ 0 & 9-4.1/2 & -2-4.(-5/4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & -1/2 & 23/4 \\ 0 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & 11/2 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$ Haciendo $F2/(-1/2)$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & -23/2 \\ 0 & -3 & 14 \\ 0 & 0 & 11/2 \\ 0 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$ Haciendo $F3+3.F2$, $F5-7.F2$ $$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & -23/2 \\ 0 & 0 & 14+3.(-23/2) \\ 0 & 0 & 11/2 \\ 0 & 0 & 3-7.(-23/2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & -23/2 \\ 0 & 0 & -41/2 \\ 0 & 0 & 11/2 \\ 0 & 0 & -158/2 \end{pmatrix}$$ Haciendo F3/(-41/2) $$= \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & -23/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 11/2 \\ 0 & 0 & -158/2 \end{pmatrix}$$ Haciendo $F4-11/2.F3$, $F5+158.F3$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1/2 & -5/4 \\ 0 & 1 & -23/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Y si además de números me meten una variable (¡no se por qué pero suele ser la **k!**)

Lo hago sin misterio y con paciencia y atención, veamos en el siguiente ejemplo como triangular la matriz:

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & k & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 6 & 1 \\ 2 & k & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$ Divido F1 por 3 $$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/3 \\ 2 & k & 5 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} F2-2.F1 \\ F3-F1 \end{matrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1/3 \\ 0 & k-4 & 13/3 \\ 0 & 0 & -4/3 \end{pmatrix}$$

¿Y todo esto para que sirve?

Para conocer el **rango de una matriz**, que es la cantidad de filas **Linealmente Independientes** que tiene. Al triangular una matriz, las filas que tienen algún elemento no nulo, son las **Linealmente Independientes**. Las que se anulan son **Linealmente Dependientes**, es decir que se pueden obtener como **Combinación Lineal** de las otras. Recordá que una Combinación Lineal de Filas es una suma (o resta) de filas multiplicadas por escalares.

¿Y todo esto para que sirve, además de para escribir este apunte.?

Todo depende de qué cosa estemos representando mediante matrices. Vamos a plantear dos enfoques muy frecuentes en el uso de matrices.

SISTEMAS DE ECUACIONES

En Sistemas de Ecuaciones, al triangular mediante operaciones válidas, lo que obtengo es un sistema de ecuaciones equivalentes (es decir con el mismo conjunto solución) más sencillo de resolver, y ese sistema de ecuaciones es el que resuelvo o analizo. Además comparando el rango de la matriz de coeficientes con el rango de la matriz ampliada puedo saber si es Compatible o no, determinado o no.

Recordemos que el rango de una matriz es la cantidad de filas que no se anulan luego de triangular.

Sea **A** la matriz, **A`** la matriz ampliada y **n** el numero de incógnitas. El rango de **A** lo expresamos como **R(A)** el de la matriz ampliada como **R(A`)**

Entonces ...

Si **R(A)**=**R(A`)**	El sistema es Compatible, es decir tiene Solución	Si **R(A)**=**R(A`)**=**n**	El sistema es Compatible Determinado	Su Solución es Única
		Si **R(A)**=**R(A`)**<**n**	El sistema es Compatible Indeterminado	Tiene infinitas soluciones
Si **R(A)**<**R(A`)**	El sistema es Incompatible		No tiene solución posible	

Veamos unos ejemplos.

Sea el sistema

$$\begin{aligned} 3x-2y+z&=6 \\ 1x+y+4z&=9 \\ 2x-y-z&=3 \end{aligned}$$

Matricialmente se puede representar así

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$$

O con su matriz ampliada A’

Triangulando la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 4 & 9 \\ 2 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & 11/5 & 21/5 \\ 0 & 0 & -12/5 & -12/5 \end{array}\right)$$

Esa matriz corresponde a un sistema equivalente, y ya vemos que es un Sistema Compatible Determinado pues **R(A)=R(A`)=n=3**

Expresándolo nuevamente como ecuaciones

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 11/5 \\ 0 & 0 & -12/5 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 21/5 \\ -12/5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 6 \\ 0x + 1y + \frac{11}{5}z &= \frac{21}{5} \\ 0x + 0y - \frac{12}{5}z &= -\frac{12}{5} \end{aligned}$$

Re-escribimos las ecuaciones y las resolvemos de **“abajo para arriba”**

$$\begin{aligned} 3x - 2y + z &= 6 \\ 1y + \frac{11}{5}z &= \frac{21}{5} \\ z &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y + \frac{11}{5}.1 &= \frac{21}{5} \\ y + \frac{11}{5} &= \frac{21}{5} \\ y &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3x - 2.2 + 1 &= 6 \\ 3.x &= 9 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

Un ejemplo de **Sistema Compatible Indeterminado**

Sea el sistema

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 8 \\ x + y + z &= 8 \\ 2x + 3y + 0z &= 16 \end{aligned}$$

Matricialmente se puede representar así

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ 16 \end{pmatrix}$$

O con su matriz ampliada A’

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 16 \end{array}\right)$$

Triangulando la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Como **R(A)**=**R(A`)**=2 < **n**=3 el sistema es Compatible Indeterminado, es decir que tiene Infinitas soluciones, ¿Cómo hallo alguna de esas soluciones (ya que hay tantas)?

Re-escribo el sistema de ecuaciones equivalente a partir de la matriz triangulada.

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 8 \\ -y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

Entonces **y=2z**

Elijo un valor para **z**, calculo el de **y** , luego reemplazo en la primera ecuación y calculo el de **x**, para cada valor de **z** que se me ocurra, podré calcular uno para **y** y otro para **x** que serán soluciones del sistema de ecuaciones

Otro ejemplo

Sea el sistema

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 10 \\ 2x + y - z &= 3 \\ 3x - y + z &= 10 \end{aligned}$$

Matricialmente se puede representar así

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix}$$

O con su matriz ampliada A’

Triangulando la matriz ampliada

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 10 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & 1 & 10 \end{array}\right) \qquad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 2 & 10 \\ 0 & 5 & -5 & -17 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array}\right)$$

Como **R(A)**=2 < **R(A`)**=3 el sistema es incompatible

ESPACIOS VECTORIALES

Qué son los Espacios Vectoriales está detallado en el Documento "**Espacios Vectoriales o En Busca de La Dimensión Desconocida**" que podés descargar de **www.unamuno.com.ar** en **Clases de Apoyo** > **Álgebra**

Para no hacer muy largo este apunte vamos a resumir eso sin demasiados ejemplos. Si con un conjunto de vectores que forman un **Sistema de Generadores** de un **Espacio** o **Sub-espacio Vectorial**, armo una matriz poniendo cada vector en una fila, y triangulo esa matriz, voy a poder detectar si alguno de los vectores es **Combinación Lineal** de los otros, cuando se da esa situación, la fila se anula.

Si hay filas (o vectores) que son **Combinación Lineal** de las otras, ese Conjunto de Vectores que denominamos Sistema de Generadores **no es una Base**.

Si no se anula ninguna fila, quiere decir que todos los vectores son **Linealmente Independientes** y que ese Sistema de Generadores **es una BASE** del espacio en estudio.

Ejemplos

Sea el conjunto **<V_1;V_2;V_3>** un sistema de generadores de un Espacio Vectorial. con **V_1=(1;2;-1)**, **V_2=(1;1;1)** y **V_3=(2;3;0)**

Armamos la matriz y la triangulamos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ ya triangulada queda $$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ vemos que se anuló la última fila.

Entonces el conjunto **<V_1;V_2;V_3>** no es una base de R^3, (tampoco es un Sistema de Generadores de R^3) pero genera un espacio de dos dimensiones R^2 (pues son dos las filas que no se anulan).

Otro ejemplo

Sea el conjunto **<V_1;V_2;V_3>** un sistema de generadores de un Espacio Vectorial. con **V_1=(3;-2;1)**, **V_2=(1;1;4)** y **V_3=(2;-1;-1)**

Armamos la matriz y la triangulamos

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$ ya triangulada queda $$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 11/5 \\ 0 & 0 & -12/5 \end{pmatrix}$$ vemos que no se anuló fila alguna

Entonces el conjunto **<V_1;V_2;V_3>** es una base de R^3

The End