VECTORES EN 3D (O EN R^{3})

Presentación: este apunte te servirá para repasar y asimilar que son los vectores en un espacio tridimensional, sólo hablamos de los vectores como se utilizan en Álgebra, para Física hay una pequeña diferencia que aquí no es relevante. Entender como representar puntos y vectores en 3D, saber representarlos en el papel, es fundamental para entender lo que viene después: ecuación del plano, ecuación de la recta y "Espacios Vectoriales". Algo de vectores debés haber visto en el secundario (o polimodal o como m... lo llamen). Si no sabés dibujar en perspectiva para representar elementos de R3 vas a tener problemas, así que aprende con lapicera y papel borrador (no hace falta regla ni compás). Ya vas a tener tiempo de hacer abstracciones cuando estudies "Espacios Vectoriales", ahí cuando trabajes con más de 3 dimensiones, no vas a poder dibujarlo ni aunque quieras.

Sobre el final de este trabajo hablamos de **BASES** y **GENERADORES**, te servirá para cuando estudies **ESPACIOS VECTORIALES.** ¡Que lo aproveches!

¿QUÉ ES UN VECTOR?

Para nosotros, en este trabajo de Álgebra un vector es un segmento orientado, es decir el trozo de recta que queda determinado por dos puntos A y B, orientado significa que no es lo mismo AB que BA. Si decimos que el vector es AB, quiere decir que comienza en el punto A y termina en el B. De los elementos que conforman una magnitud vectorial; módulo o longitud, dirección, sentido, punto de aplicación, en Álgebra solo nos interesan algunos, en Física interesan otros más. ¿Cuáles son los que nos interesan? . La dirección o recta de acción, el Sentido (para donde va) y el módulo o longitud, estos son **vectores libres**. Para nosotros, dos vectores paralelos, con el mismo sentido y del mismo módulo son equivalentes. Estos vectores libres quedan definidos por sus tres componentes (v_x , v_y , v_z)

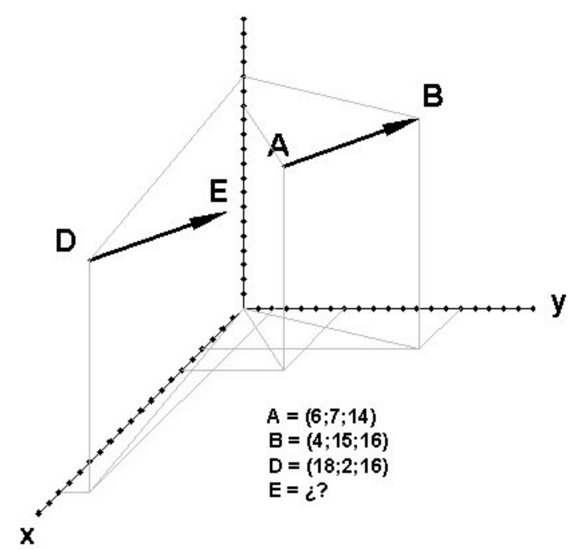
En el dibujo de la derecha tenemos dos vectores equivalentes: v_1=AB y v_2=DE cuyas componentes son:

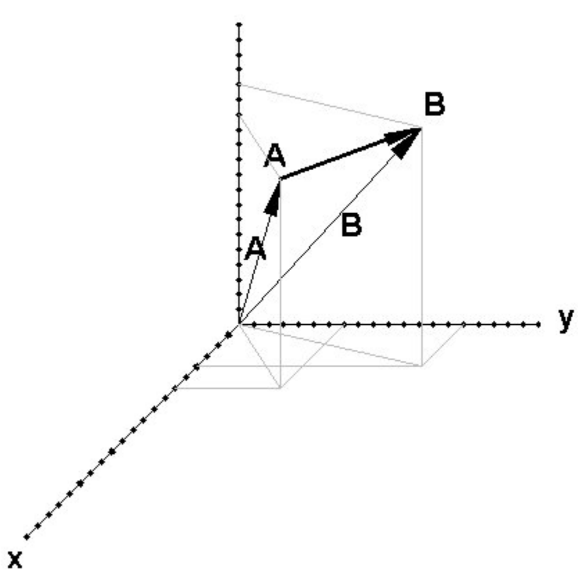
$v_{1x} = x_B - x_A$; $v_{1y} = y_B - y_A$; $v_{1z} = z_B - z_A$

o como decimos vulgarmente V_1 = B-A

Es decir que tomamos los puntos A y B como Vectores

Puedo calcular las coordenadas de E sabiendo que las de D son (18;2;16)... Si, hacelo vos.



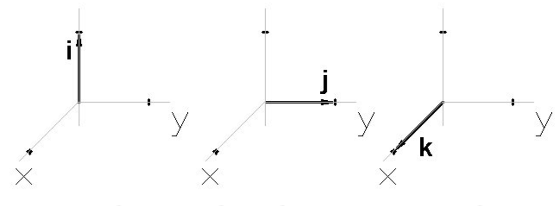


ACLARACIÓN: Puntos como vectores: Cuando decimos que un punto se puede ver y utilizar como un vector es que estamos tomando como punto inicial el origen de coordenadas (0;0;0) y como punto final del vector el punto en cuestión. De ahora en más vamos a considerar que un punto y su representación como vector son lo mismo.

En el ejemplo anterior, el vector **A** es (6;7;14) y el **B** es (4;15;16) el **AB** es (-2;8;2) y puedo escribir que B=A+AB, nada del otro mundo si pensamos que AB = B-A

En realidad lo que más nos importa de los vectores libres es la dirección y sentido que tienen. Esto no implica que el módulo o longitud no sirva o sea irrelevante.

Versores: son vectores cuyo módulo es la unidad. En este caso se utilizan para indicar direcciones y sentidos (recordar que aquí la palabra dirección se refiere a la recta de acción del vector). Hay tres versores que son particulares y hasta tienen nombre propio: ***i***, ***j*** y ***k*** , esto son vectores unitarios en la dirección de los ejes **x**, **y** y **z** respectivamente.



Operaciones elementales con Vectores

Suma y resta de vectores: los vectores se pueden sumar y restar, haciendo la operación correspondiente componente a componente:

Suma

Sea $v_1= (v_{1x};v_{1y};v_{1z})$ y $v_2= (v_{2x};v_{2y};v_{2z})$ ...

Si $v_3 = v_1 + v_2$

entonces $v_3 = (v_{1x} + v_{2x} ; v_{1y} + v_{2y} ; v_{1z} + v_{2z})$

Resta

Sea $v_1= (v_{1x};v_{1y};v_{1z})$ y $v_2= (v_{2x};v_{2y};v_{2z})$ ...

Si $v_3 = v_1 - v_2$

entonces $v_3 = (v_{1x} - v_{2x} ; v_{1y} - v_{2y} ; v_{1z} - v_{2z})$

Existe la multiplicación o producto de vectores: puede ser el producto de un vector por un escalar (un valor cualquiera perteneciente a los reales R) o de dos vectores entre si. El producto de vectores entre si lo podes estudiar descargando y leyendo "**Multiplicación de vectores"** de **www.unamuno.com.ar**.

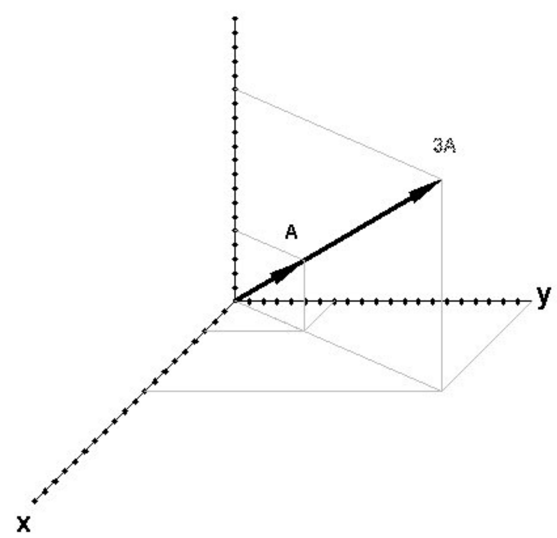
Para multiplicar un vector por un escalar se multiplica cada componente por el escalar (es como hacer una distributiva). Y si sumo (o resto) el producto de un vector por un escalar con el producto de otro vector por otro escalar obtengo lo que se llama una **COMBINACIÓN LINEAL** (pueden ser mas de dos productos escalar por vector).

Producto de un vector **A** por un escalar $\alpha \in R$

Si $\mathbf{A = (A_x;A_y;A_z)}$

entonces si lo multiplico por un escalar α:

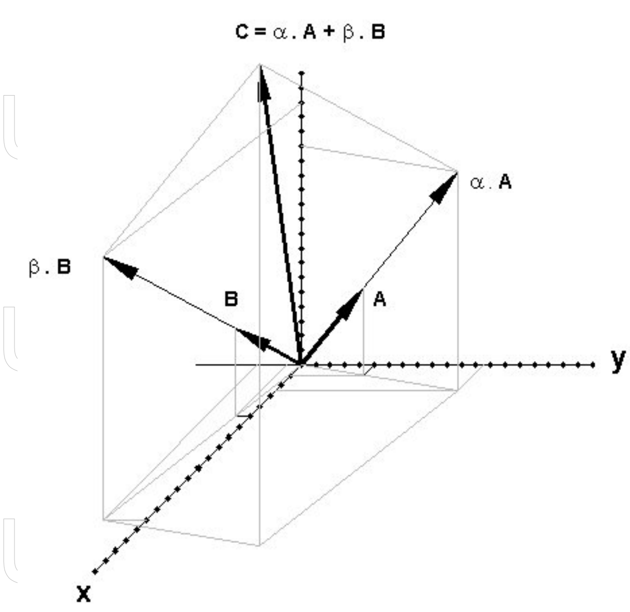
α.**A** será; $(\alpha.\mathbf{A_x}; \alpha.\mathbf{A_y};\alpha.\mathbf{A_z})$ en el gráfico se multiplico a **A** por 3.



C = Combinación lineal de **A** y **B** con α y $\beta \in$ **R**

Si a **A** lo multiplico por α y a **B** por β y sumo esos productos, obtengo lo que se llama una combinación lineal de los vectores. Esa combinación lineal es obviamente otro vector (en este caso el **C**)

Un aspecto fundamental es que el vector **C** es coplanar con **A** y **B**, es decir pertenece al mismo plano al que pertenecen **A** y **B**.



Un vector cualquiera, por Ej. el v_1=(10;12;16) puede representarse como **Combinación Lineal** de los versores antes mencionados. Vamos a hacer esto descomponiendo el vector de la siguiente manera:

v_1= (10;0;0) + (0;12;0) + (0;0;16) Separamos las tres componentes del vector.

v_1= 10 (1;0;0) + 12 (0;1;0) + 16 (0;0;1)

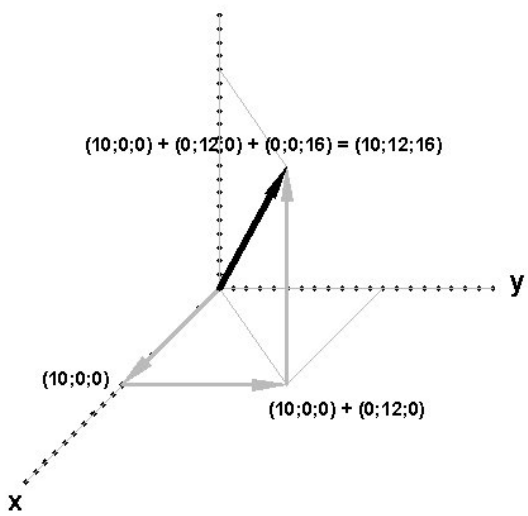
"**sacamos factor común**" de cada componente el valor de la misma y así obtenemos un escalar por un versor.

Finalmente podemos decir que v_1 es una combinación lineal de los versores **i**, **j** , y **k**

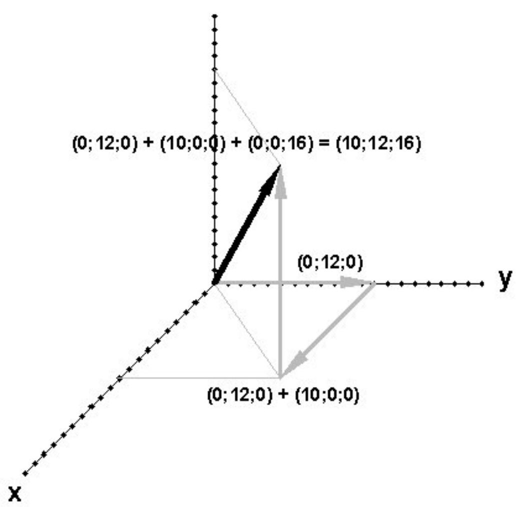
Esta descomposición es muy útil a la hora de encontrar **BASES** y **GENERADORES** de **ESPACIOS VECTORIALES**.

Ahora vamos a interpretar al vector v_1 como la suma de sus tres vectores componentes en distinto orden

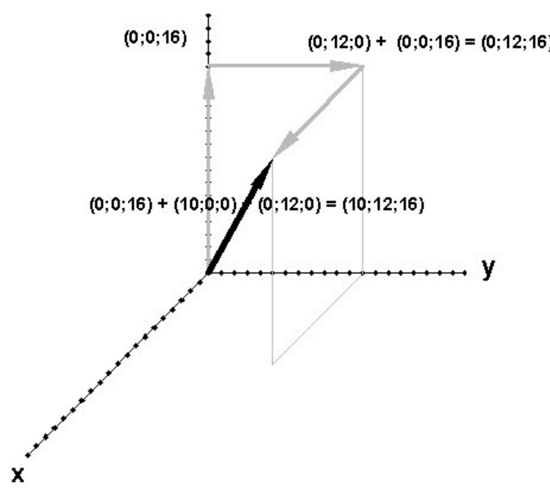
Sumando: (10;0;0) + (0;12;0) + (0;0;16)



Sumando: (0;12;0) + (10;0;0) + (0;0;16)



Sumando: (0;0;16) + (0;12;0) + (10;0;0)

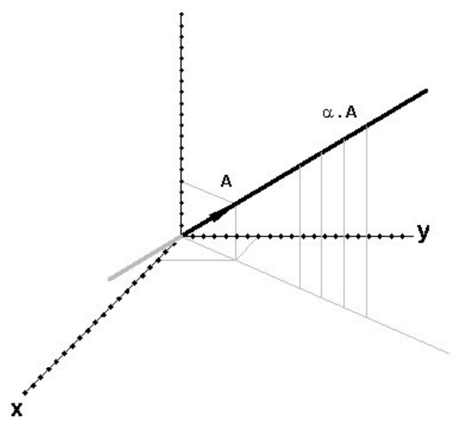


Obviamente la suma de vectores es Conmutativa ($v_1+v_2=v_2+v_1$) y Asociativa ($(v_1+v_2)+v_3 = v_1+(v_2+v_3)$)

Importante: si dos vectores son paralelos, uno se puede escribir como el otro multiplicado por un escalar. Es decir que si v_1 // v_2, entonces $v_1 = \alpha\ v_2$ y $v_2= \beta\ v_1$. Para calcular α hay que dividir v_{1x}/v_{2x} y v_{1y}/v_{2y} y v_{1z}/v_{2z}. Todos estos cocientes deben dar lo mismo: el valor de α.

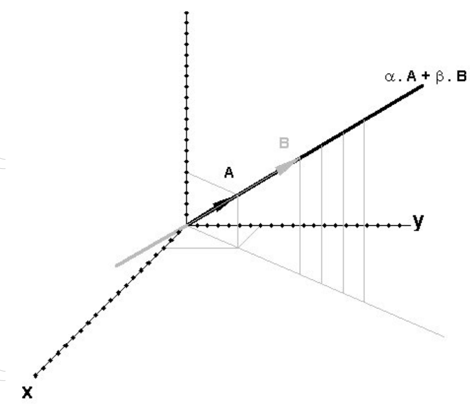
RECTA GENERADA POR UN VECTOR.

Supongamos que tengo un vector **A** y tomo el conjunto de todos los puntos a los cuales puedo llegar multiplicando ese vector por un escalar que puede tomar valores de $-\infty$ a $+\infty$. ¿Qué conjunto es ese? Es una recta. Es un **ESPACIO VECTORIAL** de una dimensión., pues es generado por un único vector. Ese vector es una **BASE** del **ESPACIO VECTORIAL** recta



Si en lugar de un vector sólo, tengo dos vectores paralelos, también puedo generar la recta mediante una combinación lineal de **A** y **B**, es más, hay muchos pares de escalares α y β que me permitirían llegar a un punto P(x,y,z) cualquiera planteando **P(x;y;z) =** α **A +** β **B**.

En este caso, **A** y **B** **GENERAN** la recta pero **NO SON UNA BASE**



PLANO GENERADO POR DOS VECTORES

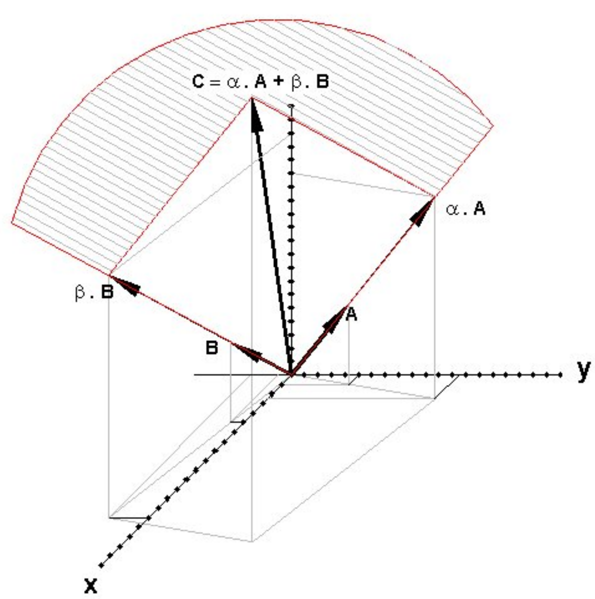
Supongamos ahora que tenemos dos vectores no paralelos **A** y **B**. Si tomamos el conjunto de los puntos **P(x;y;z) = C** con **C** que obtenemos de una combinación lineal de ellos:

P(x;y;z) = α **A +** β **B**

Lo que obtenemos es un plano, plano que obviamente pasa por el origen.

Los vectores **A** y **B** son **UNA BASE** del plano, pues lo generan y son **LINEALMENTE INDEPENDIENTES**.

Ese plano es un espacio de dos dimensiones y los valores de α y β que son únicos para cada punto del plano, son las coordenadas del punto en el sistema de coordenadas definido por **A** y **B**



¿QUÉ SIGNIFICA QUE DOS O MÁS VECTORES SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES?

Significa que ninguno de ellos puede obtenerse como **COMBINACIÓN LINEAL** de los otros, es decir que si **A**, **B** y **C** son LINEALMENTE INDEPENDIENTES no existen escalares α y β tales que sean solución del sistema: $\mathbf{C} = \alpha.\mathbf{A} + \beta.\mathbf{B}$ (¿sistema de que?). Sistema de ecuaciones por supuesto, pues yo puedo plantear componente a componente la igualdad y tomar como incógnitas a α **y** β , veamos:

$C_x = \alpha\, A_x + \beta\, B_x$

$C_y = \alpha\, A_y + \beta\, B_y$

$C_z = \alpha\, B_z + \beta\, B_z$

Este es un sistema de tres ecuaciones con dos incógnitas. Y si los vectores son **LINEALMENTE INDEPENDIENTES**, el sistema será Incompatible.

Hasta acá hemos mezclado bastante las cosas. Vamos a tratar de ordenar las cosas para ir dando paso al tema de **ESPACIOS VECTORIALES.**

Vamos a resumir y ordenar un poco todo esto hablando de los vectores **A**, **B**, **C** y **D**, cuyas componentes son (A_x;A_y;A_z), (B_x;B_y;B_z), (C_x;C_y;C_z), (D_x;D_y;D_z), y utilizaremos los escalares (números reales) α, β, χ y δ.

Dos vectores **A** y **B** no paralelos permiten generar un plano pues a cada punto de ese plano corresponde una **COMBINACIÓN LINEAL** de esos vectores. Como esa **COMBINACIÓN LINEAL** es única. Se dice que esos dos vectores son una **BASE** del plano tomado como **ESPACIO VECTORIAL**.

En símbolos

Sean **A** y **B** no paralelos

$P(x;y;z) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{B}$ es punto del plano Π (Pi mayúscula) generado por **A** y **B**.

Es decir que: $\forall P(x;y;z) \in \Pi \rightarrow \exists\ \alpha$ y $\beta \in R$ / $P(x;y;z) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{B}$ con α y β únicos

<A;B> (estos símbolos <> son nuevos, más adelante se explica su significado) son una **BASE** de Π.

Si tomo tres vectores **A**, **B** y **C**, donde **C** es **COMBINACIÓN LINEAL** de **A** y **B**. Esos tres vectores son coplanares. Es decir pertenecen al mismo plano. Cualquier punto del plano puede ser obtenido como **COMBINACIÓN LINEAL** de **A**, **B** y **C**. Esa **COMBINACIÓN LINEAL** no es única. Por lo tanto **A**, **B** y **C** conforman un **SISTEMA de GENERADORES** del plano pero no una **BASE**.

En símbolos

Sean **A, B** y **C LINEALMENTE DEPENDIENTES**, es decir que

$\mathbf{C} = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{B}$ (**C** es **COMBINACIÓN LINEAL** de **A** y **B)**.

Es decir que: $\forall P(x;y;z) \in \Pi \rightarrow \exists\ \alpha$ y $\beta \in R$ / $P(x;y;z) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{B}$ con α y β únicos

pero: $\forall P(x;y;z) \in \Pi \rightarrow \exists\ \alpha, \beta$ y $\chi \in R$ / $P(x;y;z) = \alpha \cdot \mathbf{A} + \beta \cdot \mathbf{B} + \chi \cdot \mathbf{C}$ con α, β y χ no únicos

<A;B> son una **BASE** de Π.

<A;B;C> son un **SISTEMA DE GENERADORES** de Π pero no son una **BASE** de Π.

ACLARACIÓN: **TODA BASE** es un **SISTEMA DE GENERADORES**. Pero todo **SISTEMA DE GENERADORES** NO ES UNA **BASE**.

Un conjunto de vectores es un **SISTEMA DE GENERADORES** de un plano cuando cualquier punto del plano puede obtenerse como una **COMBINACIÓN LINEAL** de los vectores del conjunto, si hay más de una **COMBINACIÓN LINEAL** que permite obtener el punto, entonces ese conjunto **no es UNA BASE**, si la **COMBINACIÓN LINEAL** es **UNICA**, entonces el **SISTEMA DE GENERADORES es una BASE**. ¡Ya me cansé!.

Vamos a dar un paso más. Supongamos que tengo 3 vectores **A**, **B** y **C LINEALMENTE INDEPENDIENTES**, es decir que uno cualquiera de ellos no puede obtenerse como **COMBINACIÓN LINEAL** de los otros dos, es decir **NO SON COPLANARES**. Fíjense cuantas maneras hay de decir lo mismo. Esto es muy importante para entender **ESPACIOS VECTORIALES**. Si tengo tales tres vectores, puedo decir que el “espacio” R^3 es generado por el conjunto **<A;B;C>**, ¡uyyyy, ganchitos nuevos! Al encerrar a los vectores con **<>** estoy indicando que es un **CONJUNTO DE GENERADORES**.

Que **<A;B;C>** genere R^3 significa que cualquier punto de R^3 se puede obtener mediante una **COMBINACIÓN LINEAL** de **A** , **B** y **C**. Es decir que el sistema de ecuaciones

$P(x;y;z) = \alpha.\mathbf{A}+\beta.\mathbf{B}+\chi.\mathbf{C}$

con incógnitas α, β y χ y con datos **x**, **y**, **z**, **A**, **B** y **C** es compatible y tiene solución (en este caso es **COMPATIBLE DETERMINADO**, es decir que tiene **SOLUCION UNICA**, es decir que **<A;B;C>** son **UNA BASE** de R^3. Al decir de López Murphy (¡esto

Sistema de ecuaciones que surge de plantear:

$P(x;y;z) = \alpha.\mathbf{A}+\beta.\mathbf{B}+\chi.\mathbf{C}$

$\mathbf{x} = \alpha.\mathbf{A_x}+\beta.\mathbf{B_x}+\chi.\mathbf{C_x}$

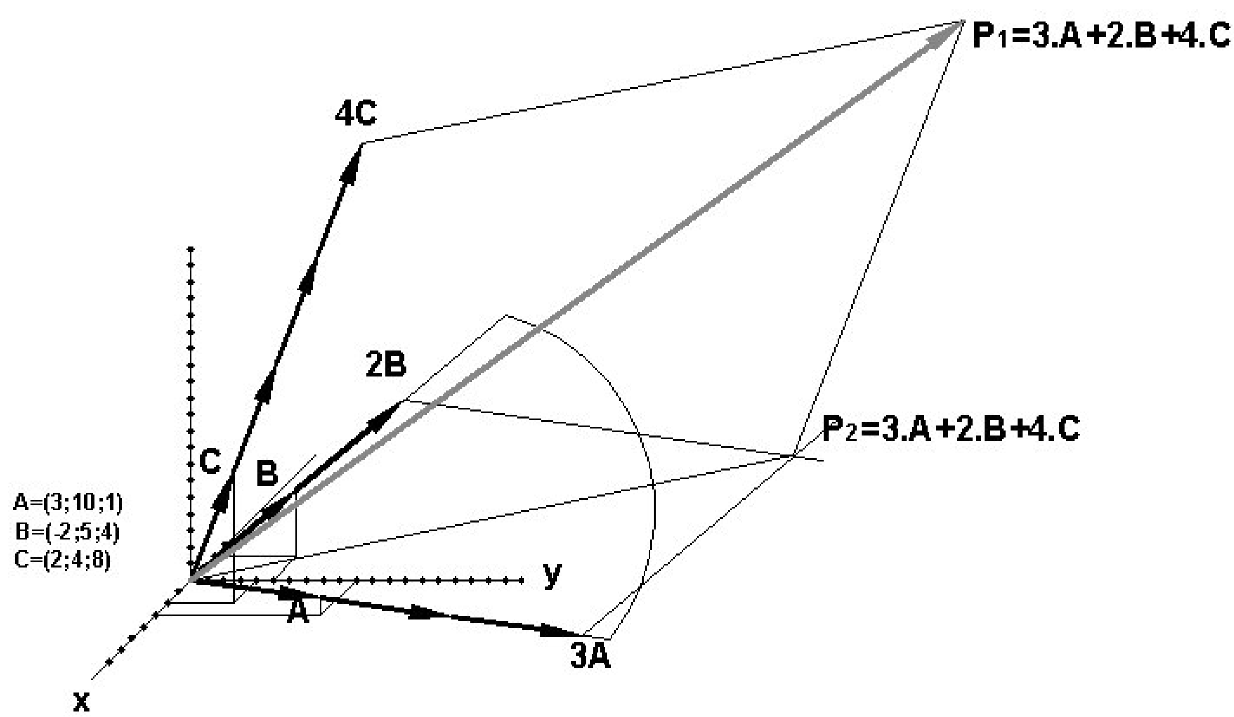
$\mathbf{y} = \alpha.\mathbf{A_y}+\beta.\mathbf{B_y}+\chi.\mathbf{C_y}$

$\mathbf{z} = \alpha.\mathbf{A_z}+\beta.\mathbf{B_z}+\chi.\mathbf{C_z}$

es un quilombo!).

Pensemos de esta manera: con dos vectores genero un plano, como ya se ha tratado de explicar, con un tercer vector que no sea coplanar a los anteriores (o sea **LINEALMENTE INDEPENDIENTE**) logro "levantar" del plano y alcanzar a los otros puntos de R^3.

Quizás este gráfico te pueda ayudar a entenderlo.



A y **B** generan el plano al que pertenece el punto $\mathbf{P_2}$. Un $\mathbf{P_2}$ genérico puede ser $\mathbf{P_2}(x;y;z) = \alpha\mathbf{.A} + \beta\mathbf{.B.}$ Eso es el plano al cual pertenecen los puntos **A**, **B** y $\mathbf{P_2}$ (recordar que los puntos pueden tomarse como vectores y que los vectores pueden tomarse como puntos) y todas la **COMBINACIONES LINEALES** de **A** y **B**.

Si tengo **C** que es oblicuo al plano generado por **A** y **B** puedo alcanzar los puntos fuera del plano, es decir el resto de los puntos de R^3.

En el dibujo: $\mathbf{P_1 = 3.A+2.B+4.C}$ con **A**=(3;10;1), **B**=(-2;5;4) y **C**=(2;4;8), entonces $\mathbf{P_1 = (13;56;43)}$

Y si tomo un $\mathbf{P_3=(2;3;-26)}$, cual será la combinación lineal de **A**, **B** y **C** que me dé como resultado ese punto o vector. Planteá las ecuaciones y resolvelas.

$P_3(2;3;-26) = \alpha\mathbf{.A}+\beta\mathbf{.B}+\chi\mathbf{.C}$

$P_3(2;3;-26) = \alpha\mathbf{.(3;10;1)}+\beta\mathbf{.(-2;5;4)}+\chi\mathbf{.(2;4;8)}$

$\mathbf{2 = \alpha.3+\beta.-2+\chi.2}$

$\mathbf{3 = \alpha.10+\beta.5+\chi.4}$

$\mathbf{-26 = \alpha.1+\beta.4+\chi.8}$

Re-escribiéndolo

$\mathbf{2 = 3.\alpha+-2.\beta+2.\chi}$

$\mathbf{3 = 10.\alpha+5.\beta+4.\chi}$

$\mathbf{-26 = 1.\alpha+4.\beta+8.\chi}$

como matrices

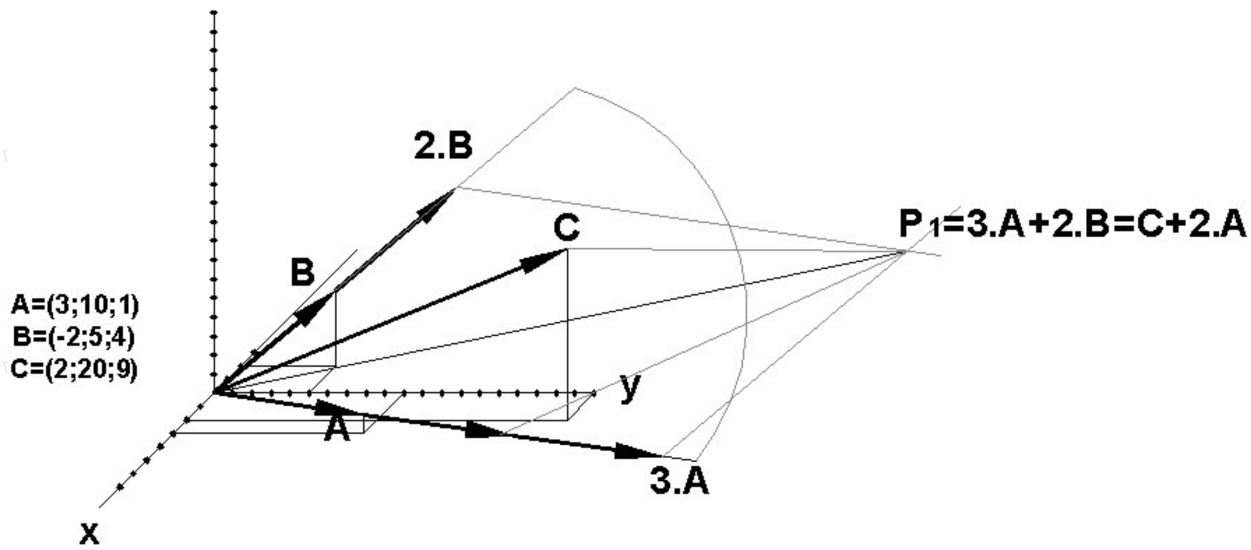
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 10 & 5 & 4 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \chi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -26 \end{pmatrix}$$

La solución al sistema de ecuaciones anterior es : α**=2,** β**=-1 y** χ**=-3**

Ahora ¿Qué pasa si **A**, **B** y **C NO SON LINEALMENTE INDEPENDIENTES**? , o lo que es lo mismo **A**, **B** y **C** son **COPLANARES** , o (baaaaaassssttttttttaaaaaaaaa!!!!!!!)

En este caso, con dos de esos vectores (que no sean paralelos) puedo generar un plano (obviamente el plano que contiene a los tres), y el tercer vector no me sirve para "levantar" del plano y llegar a los otros puntos de R^3, o sea que **A**, **B** y **C** no son un **SISTEMA DE GENERADORES** de R^3.

Veamos si el gráfico siguiente sirve para aclarar.



El punto $\mathbf{P_1}$ puede obtenerse como la combinación lineal **3.A+2.B** o la combinación lineal **C+2.A**, de aquí podemos ver que si **3.A+2.B=C+2.A**, entonces (despejando) **C=A+2.B,** o sea que **C** es combinación lineal de **A** y **B**

El próximo paso es estudiar **ESPACIOS VECTORIALES**, para lo cual hay que saber **TRIANGULAR MATRICES**. Si no sabés cómo se hace, descargá y lee "**Triangulando soy feliz**" de **www.unamuno.com.ar**.

En espacios vectoriales, se van a tratar algunos conceptos presentados aquí y se van a introducir unos cuantos nuevos. En este tema no vamos a tener gráficos (toito, toito "en el aire"), por eso es muy importante asimilar los conceptos de **LINEALMENTE INDEPENDIENTES**, **COMBINACIÓN LINEAL**, etc que se presentan en este apunte.

Conclusión: en este documento se vuelcan muchos conceptos importantes para poder manejarse con Espacios Vectoriales, Los presenté de manera un poco mezclada con la esperanza que yendo y viniendo sobre los mismos aspectos ayuden a entenderlos o a asimilar las palabras y conceptos nuevos. Esto debe servir como introducción al tema que se avecina. Espero que te sea útil.